UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

AS POTENCIALIDADES DO USO DA GEOMETRIA DINÂMICA NO ESTUDO DA CIRCUNFERÊNCIA NO 9.º ANO

Sandra Maria Henriques Cipriano Carvalho

MESTRADO EM EDUCAÇÃO

Área de Especialidade em Didática da Matemática

Trabalho de Projeto

2018

UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

AS POTENCIALIDADES DO USO DA GEOMETRIA DINÂMICA NO ESTUDO DA CIRCUNFERÊNCIA NO 9.º ANO

Sandra Maria Henriques Cipriano Carvalho

MESTRADO EM EDUCAÇÃO

Área de Especialidade em Didática da Matemática

Trabalho de Projeto orientado pelo

Professor Doutor João Pedro Mendes da Ponte

12 de outubro de 2018

Resumo

Esta investigação tem como objetivo compreender como é que os alunos desenvolvem o seu raciocínio geométrico quando recorrem ao ambiente de geometria dinâmica *GeoGebra* para resolver tarefas de construção, exploração e investigação. O propósito geral é melhorar a aprendizagem da disciplina de Matemática, tentando ir de encontro às dificuldades dos alunos e contribuir para que as superem, ou melhor ainda, contribuir para as evitar. O quadro teórico refere o contributo que os ambientes de geometria dinâmica (AGD) podem dar no ensino e aprendizagem da Matemática, mais especificamente da Geometria. Abordo ainda os processos de raciocínio em geral e geométrico em particular, com especial atenção à generalização e à justificação por parte dos alunos.

A intervenção foi feita no tema "Circunferência", que consta do currículo do 9.º ano, e segue uma metodologia qualitativa e interpretativa, com observação participante. A recolha de dados foi efetuada numa turma cuja professora é a investigadora, sendo estudada a própria turma, durante toda a unidade de ensino. Na recolha de dados foram utilizados a observação de aulas, com registos em diário de bordo e em gravações áudio, e a recolha documental das produções dos alunos em suporte papel e também em suporte informático.

Os resultados indicam que os alunos, com tarefas de carácter exploratório e investigativo, num ambiente em que se analisam as figuras obtidas com o ambiente de Geometria dinâmica *GeoGebra* e se discutem ideias, formulam conjeturas e produzem generalizações com alguma facilidade. Também conseguem justificar as suas generalizações recorrendo a métodos descritivos ou mais formais desenvolvendo as suas competências nestas áreas. Os alunos induziram e justificaram todas as propriedades previstas nos descritores do programa em vigor, em vez de simplesmente as memorizarem e aplicarem na resolução de exercícios.

Palavras-chave: Geometria, *GeoGebra*, generalização, justificação.

Abstract

This research aims to understand how students develop their geometric reasoning when they resort to *GeoGebra*'s dynamic geometry software to solve construction, exploration, and research tasks. The general purpose is to improve the learning of Mathematics, trying to meet the difficulties of the students and contribute to overcome them, or better yet, help them avoid it. The theoretical framework refers to the contribution the software of dynamic geometry could have in the teaching and learning of Mathematics, more specifically of Geometry. I also approach reasoning processes generally and geometric ones in particular, with special attention to generalization and proof by students.

The intervention was made with the theme "Circumference", which is included in the 9th grade curriculum, and follows a qualitative and interpretative methodology, with participant observation. The data collection was carried out in a class whose teacher is the researcher, being studied the class itself, throughout the whole teaching unit. In the data collection, classroom observation was used, with logbooks and audio recordings, and the documental collection of the students' productions in paper format and also in computer support.

The results indicate that the students, with exploratory and investigative tasks, in an environment in which the figures obtained with the *GeoGebra* dynamic geometry software are analyzed and ideas are discussed, formulate conjectures and produce generalizations with some ease. They can also justify their generalizations by using descriptive or more formal methods by developing their skills in these areas. Students have induced and justified all of the properties provided in the current program descriptors, rather than simply memorizing and applying them in solving exercises.

Palavras-chave: Geometry, *GeoGebra*, generalization, proof.

Agradecimentos

Ao meu orientador, Professor Doutor João Pedro da Ponte, pelo incentivo desde a primeira hora, pela incomensurável disponibilidade para me acompanhar e orientar na realização deste trabalho. O seu incentivo, o seu encorajamento, o seu rigor e a sua exigência foram determinantes para a consecução deste meu projeto bem como as suas críticas construtivas que se revelavam como uma luz a iluminar o caminho.

Ao meu marido e aos meus filhos pelo apoio, carinho, palavras de ânimo e incentivo nos momentos mais difíceis, pela compreensão nos momentos de ausência, pelo partilhar das tarefas domésticas, por aquele cafezinho e pelos beijinhos de boas noites antes de irem dormir, ficando eu a dedicar-me ao trabalho.

Aos meus pais e irmã pelo encorajamento, por compreenderem a importância deste projeto para mim, pelo seu constante apoio, incentivo, motivação, amparo e amor, fundamentais para que eu conseguisse concluir esta importante etapa da minha vida.

Aos colegas do ano curricular, mas muito especialmente à Sandra Leitão, companheira de viagens, de muitos momentos de partilha, de trabalho e também de algumas angústias. A sua amizade e apoio incondicionais foram cruciais para conseguirmos concluir este projeto.

À Direção, restantes colegas da escola onde se realizou este estudo, pela disponibilidade e apoio dado, facilitando e tornando possível a realização deste projeto.

À D. Marta e à D. Ana, assistentes operacionais empenhadas e dedicadas, que com responsabilidade e boa disposição carregavam as baterias dos portáteis e os levavam, atempadamente, no carrinho próprio à sala onde eu fosse dar aula.“Meninos, aqui têm o pequeno-almoço, chazinho, torradas, panquecas... é só escolher!”, anunciava a D. Ana ao entrar na sala com o carrinho dos portáteis.

Aos alunos que participaram nesta investigação, pela disponibilidade e pela compreensão que manifestaram, pela alegria com que trabalharam e pela forma como entusiasticamente colaboraram.

A todos o meu mais sincero agradecimento…

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABELAS

ÍNDICE DE FIGURAS

Capítulo I

Introdução

Este capítulo destina-se a apresentar as motivações que me levaram à realização deste estudo e a sua pertinência, bem como o seu objetivo e as questões a que pretendo dar resposta e indicar qual a sua organização.

1.1. Motivação e pertinência

Desde que me lembro, que me interrogo porque é que há tanta gente para quem a Matemática é algo abominável, para fugir sempre que se possa. Como refere Buzan (2007), uma das tragédias dos tempos modernos é o facto de um planeta inteiro de bebés e crianças amantes dos números e da Matemática se ter transformado em adultos convencidos de que são incompetentes para a Matemática, de que não gostam ou que têm medo dela. O autor refere ainda que das pesquisas de campo por si realizadas por todo o mundo, 75% ou mais daqueles com quem contactou se sente com uma incapacidade genética fundamental nesse campo e se mostrava reticente em participar sequer em atividades que exigiam cálculo ou manipulação de números.

Não me identifico nem um pouco com essas angústias. Para mim, a Matemática sempre fez sentido, nunca me assustou. Interrogo-me sobre o que terá feito a diferença. Terá sido uma condicionante genética favorável, um estímulo por parte de jogos ou atividades a que me dediquei na infância, estímulos vários inadvertidamente proporcionados pelo meu pai que sempre foi um curioso por jogos de lógica e enigmas com que nos entretínhamos em jantares familiares ou de amigos, ou atividades de investigação proporcionadas pelos meus professores?

Não sei de facto explicar o motivo para a minha apetência para a disciplina. Mas sei que foi determinante para a escolha da minha profissão. Tomei a decisão quando assumi no último ano do ensino secundário que aqueles raciocínios e demonstrações me fariam falta, pelo que teria de continuar a estudar Matemática e depois tentar desmistificar a dificuldade da disciplina, tornando-a mais acessível aos meus alunos.

É um propósito que tenho até hoje. Este trabalho, em particular, integra-se neste propósito uma vez que a Geometria é, pelo que me diz a minha experiência de dezoito anos de ensino básico e secundário, o tema matemático mais problemático. Isso acontece, a meu ver, dado que a dificuldade de visualização e representação mental das situações inibe o aluno de concretizar os problemas e, consequentemente, de estabelecer uma estratégia para a sua resolução. Como indica Battista (2007), esta é uma área onde os alunos revelam dificuldades de diversa ordem. Em relação à realidade de duas ou mais décadas atrás, atualmente as crianças brincam muito menos na rua e interagem portanto menos com a natureza do que outrora. Tendo em conta a forte presença da Geometria nesse meio, a existência ou não dessa interação e a forma como esta ocorre, pode estar a influenciar a apetência para a aprendizagem deste tema na escola, pois interfere com a capacidade visual-espacial de cada indivíduo.

Lea (1990) aponta que a capacidade visual-espacial é um conjunto complexo de competências que se entrosam. Inclui aspetos de distância, direção, perceção, movimento e relação da parte com o todo e de objetos entre si. Acrescento que, em 2014, no Brasil, no Paraná, foi levado a cabo um projeto que teve como objetivo trazer as brincadeiras e jogos indígenas para as aulas de Matemática a fim de promover oportunidades para que os alunos construíssem conceitos de Geometria, como ângulos, retas e polígonos, por meio da construção do tabuleiro do Jogo da Onça e da manipulação do barbante na brincadeira da Cama de Gato. Esta intervenção fez-se, precisamente, devido a suspeitas de que a diminuição da interação dos alunos com a natureza esteja a contribuir para diminuir a sua capacidade visual-espacial (Ferreira, 2014).

As competências geométricas dos indivíduos influem na sua forma de ver o mundo e de se relacionar com ele, pelo que é inegável a importância do estudo da Geometria. Portanto, a relevância que a sua aprendizagem assume é elevada, e este ramo da Matemática continua a ser uma área carente de investigação. Os resultados de estudos empíricos podem e devem ser acolhidos no sentido de uma compreensão mais aprofundada da forma como se desenvolve o pensamento geométrico dos alunos, desde os níveis mais básicos de escolaridade aos mais avançados, assim como das implicações didáticas emergentes, o que, por si só, justifica a pertinência da investigação neste campo com vista a melhorar os processos de ensino (Rodrigues e Bernardo, 2011).

Segundo Buzan (2007), os milhões de pessoas "que não gostam de Matemática" gostam efetivamente da Matemática, não gostam é de pensar que "não conseguem aprender Matemática" (p. 271). Confundem a antipatia pelo fracasso com a antipatia pela disciplina em si mesma. Isto conduz a uma espiral negativa, em que a antipatia pelo fracasso alimenta a falsa ideia da antipatia pela Matemática, o que, por sua vez, aumenta o medo do fracasso, fazendo evitar ainda mais a matéria, e assim por diante.

O NCTM (2000) define um conjunto de princípios que descrevem caraterísticas de uma educação matemática de elevada qualidade, nomeadamente: ensino e aprendizagem; acesso e equidade; currículo; ferramentas e tecnologia; avaliação; profissionalismo. Para o princípio das ferramentas e tecnologia, entre outras sugestões, defende que os professores devem realizar aulas onde se utilize tecnologia em investigações, que precedam ou acompanhem o desenvolvimento de capacidades de papel e lápis. Nesta perspetiva, com as tarefas em sala de aula a propor, e com uma comunicação matemática apropriada, pretendo que cada situação que surja seja transformada numa sequência de pequenos sucessos conducentes ao sucesso no final, que o conhecimento se vá construindo passo a passo, que o aluno vá construindo a sua teoria. Mais especificamente, os alunos devem ter experiências que lhes possibilitem: envolver-se em tarefas desafiantes que incluam uma elaboração de significado e apoiem uma aprendizagem com sentido; relacionar novas aprendizagens com conhecimentos anteriores e raciocínios informais e, nesse processo, abordar ideias e conceções erradas; adquirir conhecimento conceptual e processual de modo a conseguirem organizar com sentido o seu conhecimento, adquirir novos conhecimentos, bem como transferir e aplicar conhecimentos a novas situações; construir socialmente conhecimento, através do discurso, da atividade e da interação, no contexto de problemas com sentido; receber retorno detalhado e oportuno, de modo a poderem refletir e rever o seu trabalho, pensamento e compreensão; desenvolver uma consciência metacognitiva de si próprios como aprendizes, pensadores e agentes na resolução de problemas e aprender a monitorizar a sua aprendizagem e desempenho (NCTM, 2014). O professor tem o papel de encaminhar o aluno, de lhe chamar a atenção para aspetos relevantes que ajudem a reorientar o seu raciocínio e a transformar os aparentes fracassos em sucessos.

Ponte (1995) refere que as Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) constituem uma linguagem e um instrumento de trabalho essencial do mundo de hoje, razão pela qual desempenham um papel cada vez mais importante na educação. Na verdade, estas tecnologias (i) constituem um meio privilegiado de acesso à informação, (ii) são um instrumento fundamental para pensar, criar, comunicar e intervir sobre numerosas situações, (iii) constituem uma ferramenta de grande utilidade para o trabalho colaborativo e (iv) representam um suporte do desenvolvimento humano nas dimensões pessoal, social, cultural, lúdica, cívica e profissional. Além disso, afirma também que as TIC podem ter um impacto muito significativo no ensino de disciplinas específicas, como é o caso da Matemática. O seu uso tem por efeito (i) relativizar o cálculo e a manipulação simbólica, (ii) reforçar a importância da linguagem gráfica e novas formas de representação, (iii) facilitar uma ênfase por parte do professor nas capacidades de ordem superior, e (iv) valorizar as possibilidades de realização, na sala de aula, de projetos e atividades de modelação, exploração e investigação.

Ponte, Oliveira e Varandas (2000) reforçam a importância de a formação inicial de professores proporcionar o contacto com aplicações como o processamento de texto, sistemas de gestão de bases de dados, programas de tratamento de imagem, folhas de cálculo, programas de estatística, programas de apresentação (como o *Powerpoint*), correio eletrónico, bem como *software* educativo orientado para a aprendizagem de disciplinas específicas. Isto para que possam estar devidamente preparados para proporcionar aos alunos do século XXI outras formas de aprender e comunicar. Estes autores reiteram que, na Matemática, como em muitas outras disciplinas, as TIC podem favorecer o desenvolvimento nos alunos de atitudes mais positivas e uma visão mais completa sobre a natureza da disciplina.

O interesse da geração atual pela tecnologia é inegável e os meios de acesso à informação e as formas de comunicar são hoje ainda mais completas e mais diversas. A maioria dos alunos tem no bolso, sob a forma de um *smartphone* ligado à Internet, acesso a uma série de aplicações que lhes permitem fazer coisas inimagináveis há 20 anos atrás, bem como ter mais informação e mais atual do que na maioria das bibliotecas no início do século.

É impossível afastar os alunos desta realidade, tentar andar para trás ou reverter para as vivências de outras gerações, como as dos pais dos nossos alunos ou para as dos professores. A realidade atual é incontornável, se virmos esta evolução como um inimigo à aprendizagem vamos entrar numa batalha que certamente a escola irá perder. A meu ver este interesse tem de ser encarado como um aliado da escola, e como professora pretendo conseguir aproveitá-lo em prol da melhoria do ambiente de aprendizagem pois acredito que assim as aprendizagens melhorarão, tornando-se mais significativas.

1.2. Objetivo e questões do estudo

Entender o espaço é necessário para interpretar, compreender e apreciar o nosso mundo inerentemente geométrico. Freudenthal (1973) diz-nos que questões como “O que é a Geometria?” podem ser respondidas a diferentes níveis: no nível mais elevado, a Geometria é uma parte da Matemática axiomaticamente organizada. A nível mais elementar a Geometria é essencialmente compreender o espaço em que a criança vive, respira e se move. O espaço que a criança deve aprender a conhecer, explorar, conquistar, de modo a poder aí viver, respirar e mover-se melhor. Fazer geometria é assim explorar a realidade do espaço em que vivemos, respiramos e nos movemos.

O trabalho que me proponho desenvolver incide sobre um tema de Geometria do programa do 9.º ano, mais concretamente no capítulo Circunferência. É proposta aos alunos uma sequência de tarefas com a intenção de captar o seu interesse, tendo em vista conduzi-los à construção de conceitos, à formulação de conjeturas e à delineação de estratégias que as validem. O meu objetivo é compreender como é que os alunos desenvolvem o seu raciocínio geométrico, o seu entendimento da realidade do espaço em que vivem, quando recorrem ao ambiente de geometria dinâmica *GeoGebra*, para resolver tarefas de construção, exploração e investigação. Para atingir este objetivo procurarei responder às seguintes questões:

Q1 – Que estratégias utilizam os alunos para resolver as tarefas propostas?

Q2 – Que generalizações constroem os alunos?

Q3 – Como é que os alunos justificam afirmações matemáticas?

1.3. Organização do estudo

Para dar resposta às questões do estudo, previ a utilização de diversos métodos de recolha de dados, nomeadamente, a observação de aulas, com registos áudio e a análise das produções escritas dos alunos, que engloba a resolução das Tarefas e de uma Ficha de Trabalho para Avaliação incidindo sobre os conteúdos abordados recorrendo às tarefas. Por fim, realizo um trabalho de análise e interpretação dos dados recolhidos, através do qual procuro dar resposta às questões em estudo.

Este desenvolvimento vai sendo apresentado ao longo dos capítulos do estudo. Assim, no segundo capítulo apresento o quadro teórico, dando especial atenção aos ambientes de geometria dinâmica, raciocínio geométrico e o que se entende por generalização e justificação. O terceiro capítulo contém uma apresentação da unidade de ensino. Começa por apresentar uma abordagem geral ao contexto em que se insere esta unidade no currículo, segue com a apresentação da unidade curricular trabalhada, a descrição dos objetivos de cada tarefa e da avaliação dos alunos. Tendo em conta que a unidade de ensino é lecionada recorrendo essencialmente a tarefas e que privilegio o contexto de discussão coletiva, apresento também uma caraterização destes conceitos. No quarto capítulo é apresentada a metodologia de investigação com referência às opções metodológicas, seguindo-se uma breve caracterização da escola e do meio envolvente aos participantes. Refiro-me também aos instrumentos de recolha de dados e às fases do estudo. No final deste capítulo Indico também como tenho em conta as questões de natureza ética. O quinto capítulo debruça-se sobre os resultados obtidos a partir dos dados recolhidos, relativos ao trabalho desenvolvido pelos alunos nas aulas em que se desenvolveu o trabalho com as Tarefas e ao seu desempenho na Ficha de Trabalho para Avaliação. Finalmente, no sexto capítulo, apresento uma reflexão final e pessoal sobre todo o trabalho desenvolvido, onde discuto os principais resultados do estudo, as respostas encontradas para as questões formuladas bem como as limitações do estudo e dificuldades enfrentadas.

Capítulo II

Quadro Conceptual

Neste capítulo pretendo refletir um pouco sobre os conceitos chave importantes para o trabalho a realizar, apresentando várias visões encontradas na literatura.

2.1. Ambientes de Geometria Dinâmica (AGD)

Desde sempre as construções geométricas constituíram um processo de representar figuras que procurava materializar as propriedades das figuras mais do que a sua aparência. Os antigos matemáticos gregos interessaram-se particularmente por realizar construções em que utilizavam apenas régua e compasso. O principal interesse da procura de soluções para os problemas de construção geométrica esteve na investigação sobre as figuras e na descoberta das suas propriedades que foram estabelecidas sob a forma de teoremas mas também utilizadas em aplicações físicas.

A investigação das propriedades das figuras geométricas, praticada pelos geómetras ao longo dos tempos, constituiu uma estratégia poderosa para a aprendizagem desta disciplina. No entanto, repetir com papel e lápis várias vezes uma construção para procurar invariâncias e regularidades de uma situação pode tornar-se uma tarefa desmotivadora para os alunos (Junqueira, 1994). Morelatti e Souza (2006) referem que o computador pode causar uma grande revolução no processo de ensino e aprendizagem se for utilizado não para "informatizar" os processos tradicionais, mas se for introduzido na escola numa perspetiva de mudança do paradigma pedagógico vigente. A mudança do paradigma educacional deve ser acompanhada da introdução de novas ferramentas que devem facilitar o processo de expressão do nosso pensamento. E esse é um dos papéis do computador no processo de ensinar e aprender.

Valente (1993) identifica duas abordagens distintas de uso do computador na Educação. Uma primeira, denominada de abordagem instrucionista, que se refere à introdução do computador no ensino sem alterar ou alterando muito pouco a prática pedagógica do professor. Numa segunda abordagem, o aluno constrói o seu conhecimento fazendo algo do seu interesse, no computador, sendo esta abordagem denominada de construcionismo. A ação de resolver um problema utilizando o computador foi identificada por Valente (1993) por meio do ciclo descrição-execução-reflexão-depuração.

Dessa forma, o computador pode auxiliar a construção do conhecimento e a compreensão de conceitos. Existe *software* que contribui para essa compreensão. No entanto, a criação de um ambiente de aprendizagem que favoreça a construção do conhecimento e o desenvolvimento de habilidades de pensar, necessárias ao cidadão atual, não depende somente do *software* escolhido, mas também do professor e da metodologia por ele utilizada. Para Hernández (1998), a finalidade dos projetos em educação é favorecer o ensino para a compreensão. Desta forma, espera-se que o aluno seja capaz de aprender a aprender, de realizar aprendizagem significativa de conceitos geométricos, desenvolvendo autonomia para a aprendizagem.

Segundo Gravina (1996) os ambientes de geometria dinâmica (AGD) são ferramentas de construção de figuras e configurações geométricas a partir das propriedades que os definem. Através de deslocamentos aplicados aos elementos que compõem a figura, esta transforma-se, mantendo as relações geométricas que caracterizam a situação. Na teoria proposta por Fischbein (1993) o objeto geométrico é tratado como tendo duas componentes, uma conceitual e a outra figural. A componente conceitual, através de linguagem escrita ou falada, com maior ou menor grau de formalismo dependendo do nível de axiomatização com que se está a trabalhar, expressa propriedades que caracterizam uma certa classe de objetos enquanto a componente figural corresponde à imagem mental que associamos ao conceito, e que no caso da Geometria, tem a característica de poder ser “manipulada” através de movimentos como a translação, a rotação, e outros, mas mantendo invariantes certas relações. A harmonia entre estas duas componentes é que determina a noção correta sobre o objeto geométrico. Num ambiente de geometria dinâmica, para um dado objeto ou propriedade, temos associada uma coleção de "figuras em movimento", e os invariantes que aí aparecem correspondem às propriedades geométricas intrínsecas ao problema. É este aspeto que é extremamente importante oferecer ao aluno, a possibilidade de visualizar uma variedade de figuras que estabelece a harmonia entre os aspetos conceituais e figurais, as configurações geométricas clássicas passam a ter multiplicidade de representações, as propriedades geométricas são descobertas a partir dos invariantes no movimento (Gravina, 1996). Desta forma o recurso aos AGD (ambientes de geometria dinâmica) permite concretizar abordagens mais dinâmicas o que, indo mais de encontro aos interesses dos alunos, potencia a realização de aprendizagens mais significativas.

O *GeoGebra* é um *software* de geometria dinâmica de livre acesso e gratuito. Foi criado por Markus Hohenwarter em 2001, para a sua tese de doutoramento na Universidade de Salzburgo, Áustria (Lopes, 2013). É um programa concebido para combinar geometria, álgebra e cálculo, áreas de exploração matemática que outros *softwares* tratam separadamente, num único ambiente dinâmico de livre e fácil acesso. O surgimento do *GeoGebra*, como um recurso de educação matemática cada vez mais popular, deve-se às suas características chave: (i) versatilidade (por exemplo, representações geométricas e algébricas), (ii) acesso livre, fácil e gratuito, traduzido em várias línguas, e (iii) interatividade via *online* e através de fóruns, onde se podem trocar comentários e recursos. A partir da versão 5.0 também é possível trabalhar com geometria em três dimensões e desde setembro de 2017 está disponível uma aplicação *Graphing Calculator and Geometry Apps* disponível para *tablet* ou *smartphone*, que inclui inclusivamente um *exam mode* para que possa ser utilizado em sala de aula garantindo ao professor a utilização em exclusivo daquela aplicação, restringindo o acesso a qualquer outra de acordo com a informação veiculada no sítio da internet oficial do *GeoGebra* (www.geogebra.org). Depois do *software* ter sido publicado na internet em 2002, vários professores contactaram Hohenwarter para partilharem o seu entusiasmo no uso do *GeoGebra* nas suas salas de aula (Lopes, 2013). O *feedback* positivo dos professores foi, depois, confirmado com vários prémios de *software* educativo.

Ao permitir um grande número de experiências num curto espaço de tempo, os AGD favorecem a formulação de conjeturas através da observação do que permanece constante no meio de tudo o que varia (Veloso, 1998). Neste contexto, diversos autores sublinham que este tipo de *software* é especialmente adequado e útil quando os alunos se envolvem em atividades de investigação e exploração (Garry, 2003; Keyton, 2003; Ponte, Brocardo & Oliveira, 2006; Ponte & Canavarro, 1997; Veloso, 1998).

2.2. Raciocínio geométrico

A Matemática, pela lógica que lhe é subjacente, é indissociável do raciocínio. A problemática do raciocínio matemático e o seu desenvolvimento tem-se discutido, essencialmente, nas últimas duas décadas, tendo-se assistido a uma intensificação da investigação sobre o tema. Um ensino eficaz da Matemática envolve os alunos na resolução e discussão de tarefas que promovem o raciocínio matemático e a resolução de problemas, além de permitirem diferentes abordagens e várias estratégias (NCTM, 2014). Entre várias questões que permanecem em aberto sobre a forma como se aprende e como se pode desenvolver o raciocínio matemático, é essencial questionar como se define o raciocínio matemático. Tal como referem vários autores, como Boavida e Menezes (2012) e Pinheiro e Carreira (2013), o termo "raciocínio" é amplamente usado como se houvesse um acordo universal sobre o seu significado e, na realidade, a maior parte dos matemáticos e educadores matemáticos usam-no sem o clarificarem (Yakel & Hanna, 2003).

Battista (2007) justifica esta dificuldade em definir raciocínio referindo que o pensamento humano assenta em dois princípios essenciais, nomeadamente: (i) A mente humana constrói significados em vez de os receber; e (ii) O indivíduo constrói novo conhecimento e compreende-o baseando-se naquilo que já sabe e pensa. Trazendo estes princípios para a Matemática, pode alegar-se que, para compreender e aprender Matemática, é necessário que seja o aluno a construir os significados para as ideias matemáticas e que essa construção seja baseada no conhecimento do aluno e nas suas formas de raciocínio. Ou seja, o raciocínio é um elemento chave na construção dos significados matemáticos. Se nos situarmos num ponto de vista epistemológico, raciocinar remete para usar a razão ao julgar, compreender, examinar, avaliar, justificar e concluir. Assim, em Matemática, não raciocinamos apenas quando provamos algo. Também raciocinamos ao apresentar razões que justificam ideias ou posicionamentos, ao argumentarmos para nos convencermos, ou para convencer outros, da plausibilidade de conjeturas que enunciamos e da razoabilidade de afirmações que fazemos ou ao procurarmos explicar a coerência entre o que se aceita como válido e as suas consequências (Boavida, 2008). Esta perspetiva é consistente, por um lado, com as orientações do Programa de Matemática do Ensino Básico e, por outro, com o que referem Yakel e Hanna (2003): "o raciocínio matemático é uma atividade partilhada em que quem aprende participa enquanto interage com outros para resolver problemas matemáticos" (p. 228). Adotar este significado de raciocínio matemático conduz à necessidade de considerar que são aspetos-chave da experiência dos alunos, a formulação e análise de conjeturas, a explicação, a justificação, a argumentação e a produção de provas, pelo que raciocinar matematicamente é indissociável da resolução de problemas e da comunicação.

Para desenvolver esta capacidade é preciso trabalhar em tarefas que, por um lado, requerem raciocínio e, por outro lado, estimulam o raciocínio. Só deste modo se pode esperar uma compreensão efetiva dos conceitos e procedimentos matemáticos por parte do aluno (Ponte, Mata-Pereira & Henriques, 2012).

Em Geometria, o raciocínio tem todas as caraterísticas gerais do raciocínio matemático mas tem algumas especificidades. A importância do raciocínio geométrico é realçada em vários documentos de referência no ensino da Matemática. Nomeadamente fazer Geometria é dominar o espaço, aquele espaço em que cada criança vive, respira e se move, o raciocínio espacial é necessário para interpretar e apreciar o nosso mundo, inerentemente geométrico (NCTM, 1989). Existe uma relação muito estreita entre a Geometria e o raciocínio espacial. A Geometria consiste no estudo dos objetos espaciais, relações e transformações que foram formalizadas e nos sistemas axiomáticos que foram construídos para as representar, enquanto o raciocínio espacial consiste no conjunto de processos cognitivos à custa dos quais os objetos espaciais, as relações e as transformações entre eles são construídas e manipuladas (Clements & Battista, 1992). O raciocínio geométrico consiste essencialmente na invenção e no uso de sistemas conceptuais e formais para investigar formas espaciais (Battista, 2007).

A teoria de Dina e Peter Van Hiele também se refere ao raciocínio em Geometria. Esta teoria, desenvolvida nos anos 50, meados do século XX, propõe uma progressão na aprendizagem deste tópico através de cinco níveis cada vez mais complexos e sugere que o raciocínio geométrico evolui desde as formas iniciais de raciocínio até às formas dedutivas finais onde a intuição e a dedução se vão articulando (Ponte & Serrazina, 2000).

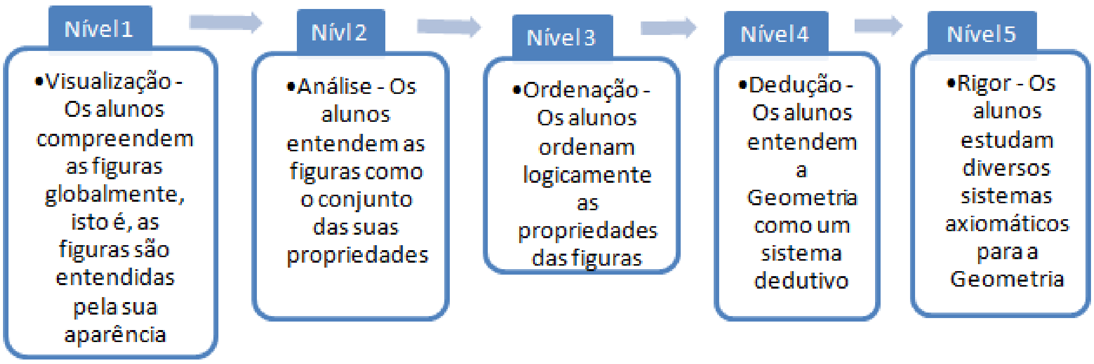


Figura 1 - Níveis de aprendizagem da Geometria (van Hiele)

Tal como se observa na Figura 1, partindo de um primeiro nível, no qual reconhece as figuras geométricas, o aluno passa, no nível seguinte, a distinguir as propriedades dessas figuras; estabelece, num terceiro nível, relações entre as figuras e suas propriedades, para organizar, no nível seguinte, sequências parciais de afirmações, deduzindo cada afirmação de uma outra, até que, finalmente, atinge um nível de abstração tal que lhe permite desconsiderar a natureza concreta dos objetos e do significado concreto das relações existentes entre eles. Delineia-se, desta forma, um caminho que, partindo de um raciocínio sobre objetos, leva a um raciocínio sobre relações, as quais se tornam, progressivamente, mais e mais abstratas. A transição do nível 1 para o seguinte deverá fazer-se no 1º ciclo e para tal é importante que neste ciclo se privilegie a abordagem intuitiva e experimental do conhecimento do espaço e do desenvolvimento das formas mais elementares de raciocínio geométrico em ligação com as propriedades fundamentais das figuras e das relações básicas entre elas. Esta progressão é determinada pela forma como o professor organiza o processo de ensino. Assim, o professor tem um papel fundamental ao definir as tarefas adequadas para os alunos progredirem para níveis superiores de raciocínio e na forma como orienta, estimula e acompanha os seus processos de raciocínio (Ponte & Serrazina, 2000).

Leivas (2012), após algumas reflexões sobre diferentes possibilidades de conduzir o ensino de Geometria, enuncia três conceitos que considera importantes para o desenvolvimento do pensamento: imaginação, intuição e visualização. Entende por imaginação algo que "expressa uma forma de conceção mental de um conceito matemático, o qual pode vir a ser representado por um símbolo ou esquema visual, algébrico, verbal ou uma combinação destes, com a finalidade de comunicar para o próprio indivíduo ou para outros tal conceito" (p. 15). Esse conceito é relevante, por exemplo, no estabelecimento de analogias para compreender o sentido de um objeto na terceira dimensão, como o cubo, a partir da representação de sua projeção no plano a duas dimensões. Por intuição entende "um processo de construção de estruturas mentais cognitivas para a formação de um determinado conceito matemático, a partir de experiências concretas do indivíduo com um determinado objeto" (p. 15). Este conceito é relevante, por exemplo, na compreensão de que cabem tantos números reais no intervalo [0,1] quanto no intervalo [0,2] ou, de forma equivalente, tantos pontos num segmento de reta de amplitude 1 unidade quantos num de amplitude 2 unidades. Por fim, compreende o termo visualização como "um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático com vista a auxiliar na resolução de problemas analíticos e ou geométricos" (p. 15). Assim, visualizar é ver com "os olhos da mente" e não simplesmente com o órgão da visão (Leivas, 2012).

De facto, visualizar é essencial, os alunos não podem resolver problemas geométricos se não tiverem criado imagens geométricas (Fujita & Jones, 2002). Estes autores usam um termo cunhado por Godfrey (1910), "olho geométrico", como sendo o poder de ver propriedades geométricas a destacar-se de uma figura, como uma ferramenta poderosa para a construção da intuição geométrica. Godfrey viveu entre 1876 e 1924, e escreveu conjuntamente com Siddons, que viveu entre 1876 e 1959, uma vasta obra no campo da Geometria, valorizando o que denomina "Geometria

Experimental", que tinha como objetivo consolidar conceitos de figuras geométricas, bem como levar os alunos a descobrir vários factos em geometria, contendo principalmente tarefas experimentais, como medição ou desenho lidando com figuras planas e sólidos. Segundo Fujita, Jones e Yamamoto (2004), a análise dos seus trabalhos mostra que existem muitas tarefas experimentais, sendo a maioria dessas tarefas introduzida por uma questão de descoberta de factos geométricos, bem como a consolidação de conhecimento de figuras geométricas.

Godfrey (1910) sugere uma forma completamente diferente de ensinar Geometria. Afirmou, já nessa altura, que aprender intuitivamente estudando as propriedades de uma figura é mais produtivo para um aluno do que o facto de ele conhecer todas as propriedades da geometria euclidiana e as saber escrever. O aluno deve conseguir visualizar a figura e conhecê-la para, intuitivamente, descobrir as suas propriedades. Neste contexto, "a mão e o olho têm de cooperar com o cérebro" (p. 198) com o objetivo de produzir informação. Tendo em conta que na realidade da época, a escola se destinava apenas a meninos de elite, o autor refere-se a "rapaz" em vez de "aluno", defendendo e explicando porque é que considera que privilegiar a intuição antes da dedução beneficia o rapaz fraco, o rapaz médio e também o rapaz bom em Geometria. Sugere que a Geometria seja abordada dessa forma ao longo dos vários níveis de escolaridade, explicando em pormenor como deverá ser encadeada, afirmando que a ideia é "atingir o objetivo de Euclides mas não pelo caminho de Euclides" (p. 200).

No entanto, se é certo o papel crucial da intuição, as interações entre a atividade matemática formal e intuitiva, fundamentais para o raciocínio geométrico, são complexas e difíceis de identificar. Quando é que cada uma começa ou acaba? Fujita e Jones (2002), autores que têm analisado a obra de Godfrey e Siddons e procurado dela retirar ensinamentos para a atualidade, defendem que o ensino da Geometria pode ser aperfeiçoado se se estabelecer uma ligação mais direta entre intuição e teoria, afirmando que a abordagem dedutiva e a abordagem intuitiva devem reforçar-se mutuamente durante a resolução de problemas matemáticos.

O *GeoGebra* exerce assim o papel de facilitador deste processo pois, partindo do particular para o geral, da observação de dados sobre os quais se formulam hipóteses exploratórias e, com base em experiências em vários outros casos, se generaliza para um conjunto mais vasto (Pimentel & Vale, 2012), os alunos estão a raciocinar indutivamente.

Há autores que afirmam que nesta fase o raciocínio abdutivo se articula com o raciocínio indutivo. Rivera e Becker (2007) defendem que, enquanto a abdução consiste em escolher uma hipótese, a indução envolve a sua testagem. A abdução é o processo de introdução de uma nova ideia, a formulação de uma conjetura; a indução corresponde ao passo seguinte, o teste da conjetura em mais dados. Para estes autores, o processo de generalização ocorre quando há aceitação de uma propriedade geométrica obtida por um processo cíclico de abdução e indução. Só o fim deste ciclo dá lugar à dedução, que envolve explicação, argumentação e prova.

Estes estádios estão de igual modo estabelecidos na definição de raciocínio de Lanin, Ellis, Elliot e Zbiek (2011) quando afirmam que o raciocínio matemático é um processo evolutivo que inclui conjeturar, generalizar, investigar porquê, e desenvolver e avaliar argumentos. É essencialmente neste processo que este estudo se concentra, pretende-se compreender como os alunos desenvolvem os seus raciocínios especialmente nas fases de generalizar e justificar.

2.3. Generalização e justificação

Lanin, Ellis, Elliot e Zbiek (2011) propõem um modelo do processo de desenvolvimento do raciocínio matemático que relaciona de forma interativa a conjetura e a generalização, a compreensão do "porquê" e a justificação ou refutação, assente em nove compreensões essenciais que o aluno deve possuir por forma a poder exercer o raciocínio nas diversas etapas. Conjeturar inclui o raciocínio sobre relações com vista a estabelecer afirmações que se procura que possam ser verdadeiras; generalizar envolve a busca de aspetos comuns entre casos ou a extensão do raciocínio para lá do domínio inicial. Na compreensão do porquê o raciocínio leva à pesquisa de vários fatores que podem explicar porque é que a generalização é verdadeira ou falsa. A justificação é um argumento lógico baseado em ideias previamente compreendidas. Uma refutação envolve demonstrar a falsidade de um caso particular. A justificação e a refutação incluem a avaliação da validade dos argumentos. Uma justificação válida de uma afirmação geral não pode basear-se em argumentos de autoridade, perceção, senso comum ou exemplos. Assim, pode estabelecer-se um paralelo com os tipos de raciocínio anteriormente apresentados. A conjetura e generalização integram-se no raciocínio abdutivo e indutivo; a justificação ou refutação relacionam-se com o raciocínio dedutivo; e a compreensão do porquê é um processo que permeia ambos, permitindo quer refutar conjeturas e reiniciar o ciclo abdutivo com nova ideia, quer confirmar a plausibilidade de generalização feita de modo a poder avançar para o processo dedutivo de justificação.

No ciclo entre os raciocínios abdutivo e indutivo a visualização revela-se fundamental. Para Zimmerman e Cunningham (1991), a visualização é o processo de formar imagens (mentalmente, com papel e lápis ou com apoio da tecnologia) e usar tais imagens eficazmente na descoberta e compreensão matemática. A visualização está patente em todas as tarefas utilizadas neste estudo.

De acordo com Mason (1996), a generalização é o coração da Matemática e pode desenvolver-se de diversas formas. O autor refere que uma das formas de desenvolver a capacidade de generalização é sensibilizar para a distinção entre "olhar para" e "olhar através de", conjugando-se esta última com a capacidade de ver a generalidade a partir do particular. Em Matemática, uma generalização é uma afirmação que descreve uma regra geral relativa a um conjunto de dados (matemáticos). Por exemplo, a afirmação "A soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo" é uma generalização matemática porque sintetiza uma relação fundamental entre um conjunto de dados (amplitudes dos ângulos internos de um triângulo). Descreve o que acontece quando adicionamos num triângulo de qualquer tipo, simplesmente num polígono com três lados, as amplitudes dos seus três ângulos internos. A generalização pode ser expressa de diversas formas. Inicialmente, as crianças podem expressar as generalizações que observam no mundo com palavras e, gradualmente, usar formas mais simbólicas (Blanton, 2008).

Lanin (2005) refere que não se pode separar a generalização da justificação. Implícita a esta ideia está o princípio de que a generalização necessita ser validada. Considerando a validade como uma ideia complexa, o autor refere existirem evidências de que os alunos têm muitas dificuldades em validar os seus argumentos, concentrando-se em encontrar exemplos particulares da situação ao invés de estabelecerem a sua regra geral.

Ao elaborar atividades de caráter investigativo com o uso do *software GeoGebra*, de forma que possam desenvolvê-las com os seus alunos com o recurso a computadores, os professores estão a promover a reflexão sobre conceitos matemáticos e as suas propriedades. A partir dessas investigações no *GeoGebra* os alunos podem ser estimulados a explorar as questões, a elaborar conjeturas, a fazer testes, a refinar as conjeturas, a validar e a avaliar os seus resultados (Lamas & Mendes, 2017). Cabe ressaltar que há necessidade de demonstrar as conjeturas obtidas via *GeoGebra*, encontrar argumentos matemáticos válidos que justifiquem a sua veracidade. Ponte (1992) explora as conceções dos professores de Matemática e no seu discurso distingue a Matemática das outras ciências pelo facto de que, enquanto nestas a prova de validade decisiva é a confrontação com a experiência, na Matemática esta prova é dada pelo rigor do raciocínio, sendo que este rigor, conferido pelo carácter preciso e formal dos argumentos matemáticos, permite à demonstração resistir à crítica.

Machado e Santos (2011) destacam, de entre as várias funções atribuídas à demonstração no contexto da sala de aula, as seguintes: verificação/convencimento, explicação, comunicação, e desafio intelectual. É a função de explicação que assume uma posição privilegiada neste contexto, pois uma demonstração que clarifique por que motivo um resultado é válido, ou não, contribui para a compreensão desse resultado (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999; Boavida, 2001; De Villiers, 1999, 2001).

Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) consideram que, sendo a Geometria um tema matemático que constitui um campo propício ao desenvolvimento do pensamento matemático, e em particular à atividade de demonstração, a utilização de *software* que funcione como ambiente geométrico dinâmico trará benefícios, quer à aprendizagem da Geometria, quer à abordagem didática deste tema. Também Ponte e Canavarro (1997) defendem que a aprendizagem da Geometria se pode tornar ativa e interessante ao realizar-se num ambiente experimental e investigativo, onde os alunos tenham possibilidade de testar e formular conjeturas. Assim, a utilização deste tipo de *software* adequa-se ao estudo da Geometria, partindo da indução para a dedução, isto é os conceitos e objetos geométricos começam a ser estudados de um ponto de vista experimental e indutivo, devendo os resultados assim obtidos serem demonstrados (Veloso, 1998). Ao permitir um grande número de experiências num curto espaço de tempo favorece a formulação de conjeturas, através da observação do que permanece constante no meio de tudo o que varia e, nalguns casos, o surgimento de contraexemplos para as conjeturas formuladas.

De Villiers (1999, 2001) refere que o não surgimento de contraexemplos fornece um elevado grau de convencimento quanto à veracidade das conjeturas. No contexto de uma investigação com recurso ao *software* de geometria dinâmica GSP (Geometry Sketchpad), De Villiers (2003) afirma que, neste caso, se pode sentir a necessidade de explicação, de compreender o porquê das generalizações serem verdadeiras, ou o desafio intelectual de as conseguir demonstrar.

O *GeoGebra*, entre outros *softwares* com caraterísticas idênticas, constitui uma poderosa ferramenta para a demonstração, pois o elevado número de experiências, que os ambientes de geometria dinâmica permitem realizar num tempo reduzido, contribui para encontrar rapidamente contraexemplos para as muitas conjeturas formuladas quando estes existem. Proporciona assim um ambiente favorável à ocorrência, em sala de aula, de uma forte característica das investigações matemáticas, designado por Ponte, Brocardo e Oliveira (2006) por "estilo conjetura-teste-demonstração". Veloso (1998) destaca mesmo que este tipo de atividades é o mais apropriado para a utilização deste *software*.

No programa de Matemática atualmente em vigor (MEC, 2013) os autores atribuem o mesmo significado a "provar" e "demonstrar" e distinguem estas ações da ação de "justificar". Consideram que, quando se solicita a um aluno que prove ou demostre uma afirmação matemática, se pretende que o aluno apresente uma demonstração matemática tão rigorosa quanto possível e, quando se lhe pede que justifique, o aluno deve saber justificar de forma simples o enunciado, evocando uma propriedade já conhecida. Balacheff (1988), na sua tese de doutoramento, dedicou-se a compreender as diferenças entre estes processos relacionando-os com os processos de raciocínio envolvidos. O autor distingue as justificações em abdutiva (semelhante ao que considero conjetura), indutiva (semelhante ao que considero generalização) e dedutiva (semelhante ao que considero prova/demonstração) e afirma que, somente a justificação dedutiva pode ser facilmente transposta para prova/demonstração, pois assemelha-se em termos de estrutura e em termos de conteúdo, afirmando que a correspondência entre justificação e prova/demonstração só pode ser estabelecida quando a justificação se baseia num caso genérico.

Monteiro e Santos (2013), com a intenção de compreender como é que os professores perspetivam, em contexto colaborativo, a argumentação matemática, procuraram responder à seguinte questão orientadora: Quais os processos argumentativos, (explicação, justificação, formulação e teste de conjeturas), que os professores privilegiam na elaboração de tarefas que concebem para promover o desenvolvimento desta capacidade nos alunos? Neste contexto, no enquadramento teórico, expuseram visões de alguns autores acerca de vários processos de argumentação, incluindo a justificação, considerando que parece especialmente relevante, em termos de argumentação, o processo seguinte: (1) formular conjeturas; (2) procurar validá-las ou, pelo contrário, refutá-las, produzindo razões ou argumentos; (3) estabelecer relações entre razões e argumentos; e (4) examinar a sua aceitabilidade em relação ao modelo teórico de referência.

Capítulo III

Unidade de ensino

Este estudo realiza-se no quadro da minha atividade letiva na unidade Circunferência, no 9.º ano de escolaridade. Neste capítulo faço uma abordagem geral ao tema como parte integrante do Programa de Matemática para o Ensino Básico em vigor (MEC, 2013), especifico os conteúdos programáticos e apresento o planeamento. A forma como está planeada a intervenção justifica que me debruce sobre a forma como integrarei na minha prática a realização de tarefas e a discussão coletiva.

3.1. Abordagem geral

O Programa de Matemática para o Ensino Básico em vigor (MEC, 2013) apresenta, para cada ano de escolaridade, os conteúdos organizados por domínios, anexando à sigla que lhe corresponde o numeral correspondente ao ano em causa. Assim, para o 9.º ano estes domínios são: Números e Operações (NO9); Geometria e Medida (GM9); Funções, Sequências e Sucessões (FSS9); Álgebra (ALG9); Organização e Tratamento de Dados (OTD9). Cada domínio está dividido em subdomínios e, dentro de cada subdomínio são apresentados os descritores numerados em dois níveis (ex: 1.1; 1.2; ... 2.1; 2.2;...), cada um deles refletindo um desempenho explicitado por um verbo. Para o 3.º ciclo os verbos utilizados são: identificar/designar; reconhecer; reconhecer, dado...; saber; provar/demonstrar; estender; justificar. O programa especifica, para cada verbo, o sentido que lhe é atribuído. Tendo em conta as questões do estudo, considero relevante salientar que o Programa distingue provar/demonstrar de justificar. Quando o descritor se inicia por provar/demonstrar o aluno deve "apresentar uma demonstração matemática tão rigorosa quanto possível", mas se o verbo utilizado for justificar o aluno deve "justificar de forma simples o enunciado, evocando uma propriedade já conhecida" (p. 3).

No 9.º ano, o domínio GM9, no qual se encontra esta unidade de ensino, está dividido nos subdomínios: Axiomatização das teorias Matemáticas (descritores 1 e 2); Paralelismo e perpendicularidade de retas e planos (descritores 3 a 7); Medida (descritores 8, 9 e 10); Trigonometria (descritores 11 e 12); Lugares Geométricos envolvendo pontos notáveis de triângulos (descritores 13 e 14); Circunferência (descritores 15 e 16). É de salientar a importância que é dada à Geometria visto que para este domínio o documento prevê a utilização de 65 tempos com a duração de 45 minutos cada, correspondendo a cerca de 46% da carga horária prevista para este ano de escolaridade (142 tempos).

3.2. Conteúdos programáticos

Os conteúdos abrangidos por esta intervenção são, dentro do domínio GM9, os respeitantes a: "9. Comparar e calcular áreas e volumes", dentro do subdomínio Medida; "15. Conhecer propriedades de ângulos, cordas e arcos definidos numa circunferência" e "16. Resolver problemas", dentro do subdomínio Circunferência. Associados a estes objetivos gerais encontram-se vinte e três descritores, dois, dezoito e três relativos ao primeiro, segundo e terceiro, respetivamente (MEC, 2013), nomeadamente 9.5 e 9.6, 15.1 a 15.18 e 16.1 a 16.3. O referido programa apresenta (p. 26) a lista de conteúdos afetos a estes descritores resumindo-os em "propriedades de ângulos, cordas e arcos definidos numa circunferência" e que a seguir apresento:

- Arcos de circunferência; extremos de um arco menor e maior;
- Cordas; arcos subtensos por uma corda; arco correspondente a uma corda; propriedades;
- Amplitude de um arco;
- Ângulo inscrito num arco; arco capaz; arco compreendido entre os lados de um ângulo inscrito; propriedades;
- Segmento de círculo maior e menor;

- Ângulo do segmento; ângulo ex-inscrito; propriedades;

- Ângulos de vértice no exterior ou no interior de um círculo e lados intersetando a respetiva circunferência; propriedades;

- Demonstração das fórmulas para a soma dos ângulos internos e de n ângulos externos com vértices distintos de um polígono convexo; aplicações: demonstração da fórmula para a soma dos ângulos opostos de um quadrilátero inscrito numa circunferência; construção aproximada de um polígono regular de n lados inscrito numa circunferência utilizando transferidor;

- Problemas envolvendo ângulos e arcos definidos numa circunferência e ângulos internos e externos de polígonos regulares.

No Anexo III encontra-se a Planificação a Médio Prazo elaborada em sede do grupo 500, constituído por todos os docentes que se encontram a lecionar Matemática a turmas do 3.º ciclo e/ou do ensino secundário neste agrupamento de escolas. Neste documento, para além dos domínios/objetivos e descritores, também se encontram previstos os conteúdos, os recursos e estratégias/atividades, as formas de avaliação a aplicar e as aulas previstas para cada tema.

O manual adotado na escola é o "Matematicamente Falando 9", da Areal Editores, edição de 2013, em uso desde o ano letivo 2013/14, ano em que foram implementadas as metas curriculares na nossa escola. Para elaborar a planificação do capítulo no âmbito desta intervenção, articulei a sequência prevista no Programa com a sequência do manual e com os conteúdos programáticos a abordar. Essa planificação consta da Tabela 1 que se segue. Aqui estabeleço uma articulação entre os subcapítulos do manual, os descritores que constam do Programa em vigor (MEC, 2013) com a indicação dos atribuídos a anos de escolaridade anteriores ou ao 9.º ano, as tarefas a aplicar e o número de tempos letivos previstos.

O Programa (MEC, 2013) refere que os alunos deverão saber relacionar as diferentes propriedades estudadas com aquelas que já conhecem, e que são pertinentes em cada situação, ainda no segundo ciclo, devendo ser pedida aos alunos a realização de diversas tarefas que envolvem a utilização de instrumentos de desenho e de medida (régua, esquadro, compasso e transferidor, programas de geometria dinâmica), sendo desejável que adquiram destreza na execução de construções rigorosas e reconheçam alguns dos resultados matemáticos por detrás dos diferentes procedimentos.

Tabela 1 - Planificação do capítulo Circunferência (manual adotado “Matematicamente Falando 9”, Areal Editores, 2013)

Capítulo 4 – Circunferência	Descritores por ano de escolaridade		Tarefas a aplicar		Nº de tempos letivos
Subcapítulos do manual	Anterior ao 9.º ano	9.º ano	Total: 7		Total: 23
Recordo – Polígonos regulares. Perímetro e área de um círculo de raio *r*. Reta tangente a uma circunferência. Ângulo ao centro.	GM6 1.1, 1.2, 5.3 e 5.5		1	Relação entre comprimento do arco, área do setor circular e amplitude do respetivo ângulo ao centro	2
1 –Ângulo ao centro. Comprimento de um arco e área de um setor circular. Arcos e cordas	ALG6 4.2	GM9 15.1,15.2,15.3, 15.4, 15.5 e 15.7; GM9 9.5			1
2 – Relações entre arcos e cordas numa circunferência		GM9 9.6 e 15.6	2	Relações entre ângulos ao centro, arcos e cordas correspondentes	2
Recordo – Polígonos regulares. Perímetro e área de um círculo de raio r. Reta tangente a uma circunferência. Ângulo ao centro.	GM4 3.1 GM6 1.4	GM9 15.7, 15.9 e 15.8	3	Reta tangente a uma circunferência, arcos e cordas entre retas paralelas e reta perpendicular a uma corda	2+1
2 – Relações entre arcos e cordas numa circunferência					
3 – Ângulo inscrito		GM9 15.10, 15.11	4	Ângulo inscrito	2
4 – Ângulo de segmento. Ângulo ex-inscrito		GM9 15.12, 15.13 e 15.14	5	Ângulo de segmento e ângulo ex- inscrito	2+1
5 – Ângulo de vértice no interior de um círculo. Ângulo de vértice exterior a um círculo		GM9 15.15 e 15.16	6	Ângulo de vértice no interior do círculo, ângulo de vértice exterior a um círculo e arcos	2
6 – Soma dos ângulos internos e externos de um polígono	GM2 2.3, GM4 3.6, GM 7 2.8, 2.9, 2.10, 2.11 e 2.13	GM9 15.17	7	Soma dos ângulos internos e externos de um polígono; polígono inscrito numa circunferência	2 + 1
7 – Polígono inscrito numa circunferência	GM6 1.3	GM9 15.18			2
Consolidação de conceitos e resolução de problemas. Avaliação.		GM9 16.1, 16.2 e 16.3			1 + 2

Para que os alunos possam realizar as aprendizagens propostas e seguindo as indicações, será fundamental apresentar-lhes as definições de base essenciais para o entendimento do contexto. Tal como refere Machado (2008), em Matemática uma definição enuncia os atributos essenciais e específicos de um ente, de modo que o torne inconfundível com outro. Assim, precisamos de definir cuidadosamente os conceitos utilizados em Geometria para que possamos tomá-los como base para o nosso raciocínio. As definições usadas nestas aulas, enquadradas nas tarefas, são apresentadas no Anexo IV.

3.3. Planeamento

A primeira aula no âmbito da intervenção apresentada é a 15 de janeiro e a última a 19 de fevereiro, sendo a Ficha de Trabalho para Avaliação realizada a 22 de fevereiro. As tarefas planificadas para a abordagem dos descritores/conteúdos, da primeira à sétima, são aplicadas sequencialmente e sem interrupções até ao final do capítulo. Estas tarefas podem ser encontradas no Anexo V. Em cada tarefa, são referidas as definições necessárias para a abordagem dos conteúdos (Anexo IV), quer sejam abordadas pela primeira vez no 9.º ano quer façam parte do currículo dos anos de escolaridade que o antecedem, sendo trabalhadas com os alunos no sentido de estabelecer linhas de continuidade com aprendizagens realizadas anteriormente, quando esse procedimento for aplicável.

Todas as tarefas, com exceção da Tarefa 5, têm uma componente de construção encaminhando-se frequentemente para o registo de dados resultantes de variações/simulações totalmente produzidas por cada par de alunos. Através da observação das várias construções que surgem movimentando elementos chave sobre a construção inicial, pretende-se que os alunos se apercebam de regularidades. Assim, abdutivamente/indutivamente, devem obter conjeturas e formalizar generalizações. A Tarefa 5 possui dois exercícios, pretendendo levar os alunos a formular uma generalização, mas desta vez a partir de duas imagens estáticas representadas no enunciado. A intenção é averiguar se os alunos sentem necessidade de criar mais exemplos de situações idênticas às ilustradas ou se as existentes são suficientes para a produção de conjeturas.

Entre o surgimento das primeiras conjeturas até à confirmação da generalização, as conjeturas são testadas e debatidas, internamente no par, entre os pares de alunos ou em momentos de discussão coletiva. Estabelecida a generalização procuro que os alunos justifiquem/demonstrem a veracidade da generalização, recorrendo a propriedades já conhecidas, em anos antecedentes ou neste ano de escolaridade. As justificações poderão ser obtidas individualmente, em trabalho de par de alunos ou em momentos de debate e/ou discussão coletiva.

A resolução das tarefas é acompanhada pela construção de um resumo. É sugerido aos alunos que construam um resumo teórico onde vão inserindo as definições que surgem e as propriedades que se vão "descobrindo", sendo-lhes entregue na primeira aula o esquema em branco para o efeito (figura 2), em suporte digital na forma de documento *Word*, já com as tabelas preparadas para preenchimento. Ao longo das tarefas/aulas, consoante são abordadas definições e demonstradas propriedades, os pares de alunos vão inserindo esses conteúdos nos respetivos espaços. O resumo teórico tem, portanto, um aspeto semelhante à figura 2, que ganhará forma e conteúdo na medida em que é preenchido. No final do capítulo espera-se que o resumo teórico tenha registados todos os conteúdos e informação relevante para o estudo do capítulo em causa, ou seja, deve estar semelhante, em termos de conteúdo ao disponível para consulta no Anexo VI.

No final de cada tarefa constam sugestões de exercícios e problemas constantes do manual em uso. De acordo com o desenvolvimento do trabalho em cada aula e com o ritmo de trabalho de cada par de alunos, estas atividades podem ser trabalhadas ainda na aula ou serem indicadas para trabalho em casa. Já o caderno de atividades, que integra o mesmo projeto do manual e que todos os alunos têm, deve ser utilizado para trabalho autónomo pelos alunos ou para, eventualmente, reforçar o trabalho com um ou outro aluno cujo ritmo de trabalho se distinga da globalidade da turma. À semelhança do que é habitual acontecer ao longo do ano letivo, quando um aluno se destaca revelando um ritmo mais acelerado ou mais lento, identificadas as causas e as circunstâncias dessa disparidade, é possível que selecione atividades diferenciadas para o aluno nessas condições.

Capítulo 4 - Circunferência (Resumo Teórico)

Perímetros e Áreas:

$P_{círculo}$ − perímetro do círculo $P_{círculo} =$ $l_{arco\ AC}$ − comprimento do arco AC $l_{arco\ AC} =$	$A_{círculo}$ − área do círculo $A_{círculo} =$ $A_{SCirc\ AOB}$ − área do setor circular AOB $A_{SCirc\ AOB} =$

	Definições	**Propriedades**
Ângulos , arcos, cordas e retas		
Polígonos		

Figura 2 - Circunferência: Resumo Teórico (por preencher)

Como indica Ponte (2014), é essencial ter em conta que uma tarefa pode ter ou não potencialidades em termos de conceitos e processos matemáticos que pode ajudar a mobilizar. O autor salienta que uma tarefa pode dar lugar a atividades diversas, conforme o modo como for proposta, a forma de organização do trabalho dos alunos, o ambiente de aprendizagem, e a sua própria capacidade e experiência anterior. Pelo seu lado, uma atividade corresponde a uma ou mais tarefas realizadas no quadro de uma certa situação. É pela sua atividade e pela sua reflexão sobre essa atividade que o aluno aprende mas é importante ter presente que esta depende de dois elementos igualmente importantes: (i) a tarefa proposta; e (ii) a situação didática criada pelo professor. Assim o papel do professor é decisivo como facilitador da transição do aluno ao longo deste processo na escolha das tarefas e de todos os aspetos que são relevantes e condicionantes ao seu bom funcionamento. Deste modo, debruço-me de seguida mais em detalhe sobre as tarefas e sobre a discussão coletiva, situação didática que privilegiarei no contexto de sala de aula sempre que considerar pertinente e enriquecedor naquele contexto.

3.4. Tarefas

A seleção das tarefas a propor aos alunos constitui um dos aspetos essenciais do trabalho do professor. Mais do que descobrir uma ou outra tarefa motivante para «amenizar» uma sequência de aulas mais «árida», o professor tem de considerar todo o conjunto das tarefas a propor na unidade, incluindo naturalmente a sua diversidade (em termos de complexidade, nível de desafio e contexto – matemático ou extra-matemático), tempo de realização e representações e materiais a utilizar (Ponte e Serrazina, 2009). As tarefas distinguem-se ainda no modo como são apresentadas aos alunos, como estes as trabalham e como servem de base à discussão e institucionalização de novo conhecimento. Especialmente importante é que as tarefas sejam interrelacionadas entre si, apresentadas em sequências coerentes (cadeias de tarefas) de modo a proporcionar um percurso de trabalho favorável à aprendizagem do aluno.

Uma tarefa matemática é bastante abrangente podendo considerar-se uma "coisa de Matemática para fazer" (p. 3) que pode, por exemplo, ser um exercício, um problema de diferentes tipos, dar um exemplo de definição, decidir sobre duas possibilidades, levar a cabo uma investigação ou realizar uma demonstração (Brocardo, 2014). As tarefas são os instrumentos mediadores entre o ensino da Matemática e a aprendizagem e constituem, por isso, um tema de grande relevo em educação matemática (Brocardo, 2014).

Margolinas, Ainley, Frant, Doorman, Kieran, Leung, Ohtani et al. (2013) consideram que uma tarefa é qualquer coisa que um professor usa para "revelar" (*demonstrate*) Matemática, para envolver interativamente os alunos, ou para levar os alunos a fazer alguma coisa. Segundo estes autores uma tarefa também pode ser qualquer coisa que os alunos decidam fazer por si mesmos numa situação particular. Referem ainda que as tarefas são as ferramentas mediadoras do ensino e da aprendizagem matemática, sendo as questões centrais como se relacionam com a aprendizagem e como são usadas didaticamente.

Assim o ensino inclui selecionar, modificar, desenhar, sequenciar, aplicar, observar e avaliar tarefas (Margolinas et al., 2013). Muitas vezes, a tarefa vai-se desenhando na cabeça do professor, ele vai pensando que gostava de aplicar uma tarefa que levasse a determinados raciocínios por parte dos alunos. De seguida vai procurar, fisicamente num livro didático já editado por alguém, ou na internet, fazendo pesquisa num motor de busca ou acedendo a plataformas de acesso desenvolvidas por editoras especialmente dedicadas ao ensino como a Escola Virtual. Às vezes encontra precisamente aquilo que procura, outras vezes, encontra algo que se aproxima daquilo que idealizou mas não exatamente, e ainda outras vezes não encontra. Ainda que tenha selecionado uma tarefa interessante, frequentemente, um professor experiente considera que falta qualquer coisa ou tem algo em excesso, conhece a sua turma e a sua forma de trabalhar, e começa a desenhar a tarefa, modificando-a graficamente, muda a figura, altera a ordem das alíneas e/ou introduz novas alíneas e retira outras. Não me estou a referir exclusivamente a processamento de texto, o professor pode ainda preparar uma apresentação no *Powerpoint* ou *Prezi*, criar uma aplicação no *GeoGebra* ou outro programa de geometria dinâmica, construir cartões ou outros materiais. Define então a sequência pela qual apresenta os vários materiais ou os itens da tarefa. Finalizado este trabalho chega o momento de aplicar. Durante a aplicação há que observar a reação dos alunos à tarefa, se está a decorrer como planeado ou se terá de fazer alguns ajustes. Todas as fases têm a sua importância mas este momento é particularmente importante, porque se o professor não encaminhar os alunos para o fim a que se propôs quando idealizou a tarefa todo o trabalho se irá perder. Depois há que avaliar a forma como decorreu, se conseguiu atingir o objetivo da tarefa, se o tempo dedicado foi a mais ou a menos, se deveria introduzir ou retirar fases à tarefa, entre outras observações. Assim, numa ocasião posterior poderá fazer melhor.

No caso particular deste estudo as tarefas foram desenvolvidas por mim a partir daquilo que idealizei. No entanto, acredito que aquilo que preparei esteja dependente do que vi, consultei e observei ao longo dos anos em que lecionei, das experiências várias que tive com outros alunos, sempre que o conteúdo

"Circunferência" fez parte do currículo no 9.º ano. Acredito que tudo isso nos condiciona e já dei por mim a idealizar tarefas em circunstâncias de lazer, aparentemente distanciada do trabalho, ou enquanto conduzia na autoestrada por exemplo. As várias experiências que um professor vai aglomerando nos vários contextos influem na construção de tarefas.

Ponte (2014) salienta que as tarefas que o professor propõe na sala de aula marcam de forma fundamental o ensino que este realiza, recordando que as tarefas propostas aos alunos devem basear-se em Matemática correta e significativa, no conhecimento das compreensões, interesses e experiências dos alunos, e no conhecimento das diversas maneiras como diferentes alunos aprendem Matemática. Reitera ainda os requisitos que as tarefas devem cumprir, nomeadamente envolver os alunos em atividade intelectual, desenvolver as compreensões e capacidades matemáticas dos alunos, estimular os alunos a fazer ligações e a desenvolver um quadro coerente de ideias matemáticas, exigir a formulação e resolução de problemas e o raciocínio matemático, promover a comunicação acerca da Matemática, representar a Matemática como uma atividade humana em constante desenvolvimento, mostrar sensibilidade ao apoiar-se nas experiências e disposições dos alunos e promover o desenvolvimento da disposição de todos os alunos para fazer Matemática.

Ponte (2005) propõe uma organização das tarefas que tem em conta o grau de abertura, o desafio cognitivo, a relação com a realidade e a duração da sua realização e salienta que cada uma, de acordo com as suas características próprias, ocasiona diferentes oportunidades de aprendizagem para os alunos. O NCTM (2014) salienta a importância de os alunos contactarem com tarefas matemáticas significativas para introduzir conceitos e para os envolver e desafiar intelectualmente. Para se certificarem que os alunos têm oportunidade de se envolverem em pensamento de nível elevado, os professores devem regularmente selecionar e propor tarefas que promovam o raciocínio e a resolução de problemas. Estas tarefas encorajam o raciocínio e viabilizam o acesso à Matemática por meio de múltiplas abordagens, entre as quais o uso de diferentes representações e ferramentas, e promovem a resolução de problemas através de estratégias variadas (NCTM, 2014).

Mas, tal como já foi referido, por si só uma boa tarefa só resulta articulada com uma boa situação didática criada pelo professor. É neste contexto que se revela importante falar sobre os momentos de discussão e comunicação em coletivo. Segundo Ponte (2005), estes momentos são a pedra de toque de todas as etapas de resolução de uma dada tarefa.

3.5. Momentos de discussão e comunicação em coletivo

Ponte (2005) distingue essencialmente dois tipos de ensino. O ensino direto tem subjacente a ideia da transmissão do conhecimento. Este conhecimento encontra-se sistematizado no programa, no manual escolar e noutros materiais. O professor procura garantir que o aluno aprende este conhecimento e avalia de que modo o adquiriu. No quadro deste ensino, a "exposição de matéria" assume um lugar de relevo, razão porque ele é, muitas vezes, designado por "ensino expositivo". Num ensino que segue uma estratégia alternativa, a característica principal é que o professor não procura explicar tudo, mas deixa uma parte importante do trabalho de descoberta e de construção do conhecimento para os alunos realizarem. A ênfase desloca-se da atividade "ensino" para a atividade mais complexa "ensino-aprendizagem".

Ensino directo	Ensino-aprendizagem exploratório
Exposição pelo professor	Ênfase em tarefas de exploração e investigação
Resolução de exercícios	Discussão professor-alunos

Figura 3 – Diversas estratégias de ensino, de acordo com o papel do professor e dos alunos e a ênfase das tarefas (Ponte, 2005, p. 14)

Segundo Ponte (2005) existem versões extremas de ensino direto e de ensino-aprendizagem exploratório, tal como existem muitas versões intermédias. Se o professor suscita a participação dos alunos na exposição da matéria, através de perguntas, não deixa de ser ensino direto, pois neste caso é ainda ele quem assume o protagonismo fundamental na aula. Continuamos a ter este tipo de ensino quando o professor, ao lado de exercícios de aplicação prática dos conceitos ensinados, propõe pontualmente outras tarefas mais problemáticas ou mais abertas, com vista a promover outro tipo de atividade nos alunos. Não é uma ou outra tarefa pontual mais interessante que marca o estilo de ensino, mas sim o tipo de trabalho usual na sala de aula. Por outro lado, num processo de ensino-aprendizagem de cunho exploratório, também podem e (possivelmente, em muitos casos) devem haver momentos de exposição pelo professor e de sistematização das aprendizagens por ele conduzidos. Ensino-aprendizagem exploratório não significa que tudo resulta da exploração dos alunos, mas sim que esta é uma forma de trabalho marcante na sala de aula. Ou seja, não é a realização ocasional de um outro tipo de tarefa que define o carácter geral do ensino, mas a tendência geral do trabalho desenvolvido (Ponte, 2005).

Este autor chama ainda a atenção para a relevância da forma como a informação é introduzida, se é previamente ao restante trabalho ou durante a realização das tarefas e se esta informação é discutida e sistematizada de forma aprofundada e com que grau de participação dos alunos. Na sua opinião, uma estratégia de ensino-aprendizagem exploratória, pretendendo evitar os efeitos negativos de começar pela introdução de informação conduzida pelo professor, corre o risco de não chegar a evidenciar a informação importante, deixando os alunos confusos e sem uma noção clara do que podem ter aprendido. Por isso, os momentos de reflexão, discussão e análise crítica posteriores à realização de uma atividade prática assumem um papel fundamental. Isto porque os alunos aprendem a partir da reflexão que realizam sobre o que fizeram durante as atividades práticas, não somente com o que fizeram nessas atividades. A aprendizagem decorre assim, sobretudo, não de ouvir diretamente o professor ou de fazer esta ou aquela atividade prática, mas sim da reflexão realizada pelo aluno a propósito da atividade que realizou (Ponte, 2005).

Mas para o aluno poder refletir sobre o que realizou ele tem que estar integrado na prática, senti-la como sua e estar motivado para aprender. Por isso, o ambiente em que decorre a realização das tarefas é muito relevante. Nesta intervenção os alunos trabalham a pares, portanto à partida é suposto que interajam com o outro elemento do par e, ocasionalmente, com outros pares de trabalho na sua proximidade, desde que o tema da interação seja o desenvolvimento da tarefa. Os alunos, ao interagirem uns com os outros na exploração de uma tarefa matemática, encontram-se num meio envolvente potencialmente mais confortável para falar e pensar em voz alta. Nesse processo de interação desenvolvem uma maior confiança em si próprios e estão mais aptos a acompanhar e a participar ativamente nas discussões que ocorrem em grande grupo.

A aceitação de normas que propiciem a elaboração e refutação de conjeturas, designada por Mason (2010), como atmosfera de conjetura, proporciona o desenvolvimento do raciocínio nos alunos. Numa aula com essas caraterísticas, alunos e professor, sem necessitar de rotular de certo ou de errado as diferentes afirmações formuladas, encaram-nas como pontos de partida para a discussão, questionando, duvidando e reformulando. É importante um professor saber como perguntar, as perguntas que deve fazer e as formas de perguntas a evitar de modo a fazer fluir as interações dos alunos. Considerando que na escola as perguntas são vistas como uma espécie de processo de teste, através do qual os alunos supostamente aprendem, e isso se transmite em interações, este autor dedicou-se a estudar questões como: Como surgem as perguntas na sala de aula? Como podemos usá-las efetivamente? Como podemos estimular os alunos a fazer as suas próprias perguntas? Apresenta a propósito uma série de sugestões que não pretende que sejam vistas como estanques, mas sim que suscitem reflexão por parte dos professores. A título de exemplo refere que o professor deve usar perguntas que tenham o efeito de direcionar a atenção do aluno para o que o professor acha relevante que o aluno observe, analise ou recorde, de forma a ir, indiretamente, encaminhando o aluno e/ou a turma para o objetivo a que se propôs. O autor analisa vários tipos de questões, discute várias formas de tornar as questões eficientes, refere e analisa modos de captar a atenção do aluno, apresenta sugestões de como estimular os alunos a fazerem as suas próprias questões e também de como responder às questões dos alunos.

Segundo Camargo, Lindemeyer, Irber e Ramos (2011) a pergunta na sala de aula tem um papel importante para a aprendizagem, tanto dos alunos como dos professores, tendo um papel transformador. O estudo consiste na análise dos depoimentos de vinte e dois professores que consistem em respostas à pergunta "Qual o papel e a importância da pergunta na sala de aula para a aprendizagem?".

Dessa análise emergiram seis categorias de perguntas associadas às suas várias funções: a pergunta como modo de identificar conhecimentos dos alunos; a pergunta como modo de estimular os alunos para a aprendizagem; a pergunta como promotora do diálogo; a pergunta como promotora da pesquisa na sala de aula; a pergunta como modo de estimular a relação entre o professor e os alunos; e a pergunta como modo de avaliação.

Recorrendo a perguntas, incentivos, confirmações, sugestões, ou outras estratégias, o professor deve esforçar-se por criar um ambiente de aprendizagem em que a procura de uma construção coletiva do conhecimento seja assumida por todos os intervenientes. Stein, Engle, Smith e Hughes (2008) salientam a importância do papel do professor na orientação da discussão coletiva que se inicia a partir do trabalho desenvolvido pelos alunos e se desenvolve limando as ideias que produziram e fazendo-as avançar para um pensamento matemático mais poderoso, eficiente e rigoroso. No desempenho desse papel, os autores referem alguns dos desafios que se colocam ao professor: apoiar os alunos no desenvolvimento do discurso matemático, incentivar os alunos a expor publicamente os seus raciocínios e a construir e a avaliar as suas ideias matemáticas e as dos outros. O modelo de preparação e realização de discussões matemáticas apresentado por Stein, Engle, Smith e Hughes (2008) consiste em cinco práticas fundamentais: *antecipar* as respostas dos alunos às tarefas matemáticas de exigência cognitiva elevada; *monitorizar* o pensamento matemático dos alunos durante a fase de exploração das tarefas; *selecionar* os alunos que podem apresentar as suas respostas matemáticas durante as fases discussão e de síntese; *sequenciar* as respostas dos alunos a apresentar; e *conectar* entre as respostas dos alunos sendo para isso fundamental encadear as ideias matemáticas ao longo das apresentações de modo a desenvolvê-las.

Já Cengiz, Kline e Grant (2011) identificaram três tipos de ações do professor presentes nos episódios de discussão coletiva em que há ampliação do pensamento matemático: apoiar (*supporting*), incitar (*eliciting*) e ampliar (*extending*). Estes autores designaram esses episódios por episódios de "ampliação" e são caracterizados por envolverem reflexão ou raciocínio ou por ultrapassarem os métodos de resolução iniciais. As ações de *apoiar* visam apoiar os alunos a relembrar o que já sabiam ou a considerar nova informação. As ações de *incitar* permitem ao professor aceder ao pensamento matemático dos alunos e torná-lo público. As ações de *ampliar* encorajam os alunos a ir além dos métodos usados na atividade matemática inicial e foram identificadas em situações de convidar os alunos a avaliar uma afirmação ou observação, sustentar uma afirmação, comparar métodos diferentes, usar os mesmos métodos para novos problemas ou contra-argumentar uma afirmação.

Independentemente da distinção que se fizer das várias fases da discussão coletiva o que se deve destacar é que os professores necessitam de, simultaneamente, incitar os alunos a que explicitem os seus pensamentos, esforçando-se para que apresentem argumentos válidos das suas considerações, garantindo também que os alunos fazem uma correta e consistente apropriação dos conceitos matemáticos.

3.6. Avaliação dos alunos

Para averiguar a aquisição de conhecimentos por parte dos alunos, estes resolveram uma Ficha de Trabalho para Avaliação (Anexo VII), aplicada num tempo de 45 minutos. Tal como é usual, os alunos resolveram esta prova individualmente e em folha própria em uso no agrupamento. Procurei que a ficha tivesse um aspeto visual similar ao que elaboro usualmente e tivesse duas versões como de costume. Procurei, ainda, que os alunos pudessem consultar as cotações numa tabela no final do enunciado, também como acontece regularmente.

A ficha é composta por duas questões, a primeira com 6 alíneas. Destas, a alínea 1.1 encontra-se subdividida em 9 subalíneas, a alínea 1.4 está subdividida em 4 subalíneas e a alínea 1.5 está também subdividida em 9 subalíneas. A segunda questão é constituída por três alíneas, estando a última subdividida em duas. A diferença está essencialmente na estrutura das questões, ilustrada pelo verbo indicador da ação a desenvolver como se pode observar na tabela 2.

Como se observa, 35% da cotação desta ficha de trabalho estão afetos a verificações, justificações e demonstrações. Este peso é significativamente maior que o usado nas restantes fichas de avaliação. Mas é muito relevante para o estudo observar como os alunos efetuam justificações e considerei que, caso as justificações tivessem um peso reduzido na cotação, esse facto poderia estimular os alunos a não justificar as suas conjeturas e os seus cálculos.

Tabela 2 – Verbo indicador da ação a desenvolver nas alíneas das questões

Alínea	Verbo(s)	Cotação (%)
1.1	Indica	13,5
1.2	Classifica/justifica	4
1.3	Mostra que	5
1.4	Determina	20
1.5	Determina	31,5
1.6	Verifica que	4,5
2.1	Justifica	6
2.2	Determina/justifica	6
2.3	Indica/justifica	9,5

Assumi que se este aspeto contribuísse para que os alunos tivessem um desempenho abaixo do usual, esse facto não os prejudicaria no cômputo da sua avaliação final à disciplina. Isto porque, no contexto dos critérios de avaliação vigentes para a disciplina de Matemática aprovados em sede de Conselho Pedagógico e que constam do Projeto Educativo do Agrupamento, esta Ficha de Trabalho para Avaliação só pode ser considerada no âmbito das “atividades de sala de aula”, que têm um peso por período letivo correspondente a 2,5%, como uma das quatro componentes do domínio sócio-afetivo-organizativo que tem um peso total de 10% na avaliação final do aluno. Por período letivo estão previstas especificamente duas fichas de avaliação globais, isto é, incluindo os vários conteúdos programáticos lecionados nesse ano letivo até à data da realização da ficha de avaliação e, pelo já descrito (e indicado no Anexo VII), esta Ficha de Trabalho para Avaliação só inclui conteúdos da unidade de ensino em causa e que é objeto desta intervenção.

Como já indiquei, a distribuição das cotações tem como princípio o estímulo à apresentação da totalidade do trabalho solicitado. Os resultados em termos percentuais também são alvo de análise, mas o que mais me importa é a forma como os alunos respondem, pelo que a cada resposta atribuo um nível de desempenho, não me limitando apenas a considerar certo ou errado e a atribuir uma cotação.

Capítulo IV

Metodologia de Investigação

A metodologia utilizada numa investigação depende do objetivo que se pretende atingir. Neste capítulo apresento as opções metodológicas tomadas, os instrumentos e processos utilizados de forma a proceder à recolha e análise de dados e descrevo as fases do estudo e cuidados de natureza ética.

4.1. Opções metodológicas

A investigação usada neste trabalho é de natureza qualitativa e interpretativa. A forma como foi delineada esta investigação enquadra-a nas investigações qualitativas que, segundo Bogdan e Biklen (1994), têm essencialmente as seguintes características: (i) a fonte direta de dados é o ambiente natural, sendo o investigador o instrumento principal de recolha de dados; (ii) os dados recolhidos são descritivos e não numéricos, pois têm a forma de palavras ou imagens; (iii) o investigador interessa-se sobretudo pelo processo, relegando para segundo plano os resultados; (iv) a análise dos dados é feita de uma forma indutiva, não se pretendendo confirmar hipóteses prévias; e (v) procura compreender o significado que os participantes atribuem às suas experiências. É de notar, porém, que estas características podem não ter o mesmo peso em todas as investigações qualitativas. Constituindo um estudo qualitativo, este trabalho descreve a forma como os alunos utilizam os seus conhecimentos geométricos na definição de conjeturas e que estratégias desenvolvem para as justificar; é interpretativo porque procura compreender a forma como os alunos interpretam o enunciado dos problemas geométricos e as dificuldades que sentiram.

Este trabalho constitui também uma investigação sobre a minha própria prática (Ponte, 2002). Na verdade, esta investigação decorre na minha prática profissional, na sala de aula, como professora de Matemática de uma turma do 9.º ano do ensino básico. Trabalhando com tarefas de caráter investigativo encaro a sala de aula como um "teatro de operações" em que o aluno tem um papel crucial na descoberta de uma estratégia de "ataque" ao problema. Pretendo testar novos métodos de trabalho nas interações com os alunos e procurar melhorá-los. Portanto sinto necessidade de compreender as dificuldades e os processos que os meus alunos utilizam para poder proporcionar-lhes experiências de aprendizagem que permitam obter os resultados desejados em termos de sucesso escolar.

Ponte (2008) afirma que os professores se defrontam com uma grande variedade de problemas de natureza diversa na sua prática quotidiana pelo que a investigação do professor sobre essa prática se revela fundamental para construir conhecimento sobre essa mesma prática, sendo importante para os professores que a fazem e podendo ainda contribuir para esclarecer os problemas da prática e procurar soluções. Como refere o autor, tal processo pode ter dois objetivos: (i) intervir no sentido de alterar algum aspeto da sua prática e (ii) procurar compreender a natureza dos problemas com os quais se defronta para elaborar as estratégias de ação mais adequadas.

A investigação dos profissionais sobre a sua prática pode ser importante por várias razões. Antes de mais, ela contribui para o esclarecimento e resolução dos problemas; além disso, proporciona o desenvolvimento profissional dos respetivos atores e ajuda a melhorar as organizações em que eles se inserem; e, em certos casos, pode ainda contribuir para o desenvolvimento da cultura profissional nesse campo de prática e até para o conhecimento da sociedade em geral (Ponte, 2002).

4.2. Participantes

A minha prática letiva realiza-se na Escola Básica 2,3 D. João II. Esta escola foi inaugurada em setembro de 1995, tendo sido sede do Agrupamento de Escolas D. João

II entre 2002/03 e 2011/2012, inclusive. Situa-se na cidade de Santarém, a cerca de três quilómetros do centro da cidade. Atualmente, em 2017/2018, tem 29 turmas e cerca de 650 alunos. Desde 2012/2013 e até agora, inclusive, integra o Agrupamento de Escolas Sá da Bandeira. A área de abrangência do agrupamento está situada a meio do concelho de Santarém, é a segunda maior de entre os quatro agrupamentos de escolas em que se divide o concelho, mas é a que tem o maior número de alunos (em 2016/17, 1732 no 3.º ciclo e 1674 no ensino secundário).

O agrupamento, bem como a Escola D. João II, espelha uma diversidade socioeconómica e realidades socioculturais diferentes decorrentes da dispersão geográfica da sua área de influência e por ser uma escola pública com alunos provenientes de freguesias rurais e urbanas, com vivências próprias, sendo que o setor primário e secundário prevalecem nas zonas rurais e o setor terciário domina a realidade urbana.

A turma onde decorre a intervenção é uma turma grande, constituída por 28 alunos, em que cerca de metade reside dentro do limite urbano da cidade e os restantes provêm das zonas rurais circundantes. A idade dos alunos varia entre os 14 e os 16 anos e a sua distribuição por género é equilibrada, existindo na turma 12 elementos do sexo masculino e 16 do sexo feminino. No que diz respeito às habilitações académicas dos pais/encarregados de educação, estas variam entre o 1.º ciclo e o grau académico de mestrado.

Em termos de percurso escolar, a turma é significativamente estável desde o 7.º ano, dado que cerca de 85% dos alunos a integram desde então. Há 3 alunos com retenções no seu percurso escolar, mas apenas um aluno a repetir o 9.º ano. O seu aproveitamento é considerado suficiente, tendo em conta que na avaliação do final do 1.º período letivo a taxa de sucesso (percentagem dos alunos que transitariam caso se tratasse da avaliação de final de ano) é de 74% e a taxa de sucesso pleno (percentagem dos alunos sem níveis inferiores a três) é de 41%. Quanto à disciplina de Matemática a taxa de aproveitamento é de 82%, registando-se cinco alunos com aproveitamento insuficiente, aliás um insucesso reiterado e já característico de anos anteriores. É relevante referir também que tenho sido a docente da disciplina da maioria dos alunos ao longo destes três anos, sendo atualmente uma turma com um bom ritmo de trabalho e maioritariamente constituída por alunos empenhados e interessados em

Matemática. O comportamento da turma é bom, existindo dois ou três elementos menos interessados ou mais propensos a desenvolver conversas fora do contexto educativo.

4.3. Recolha de dados

No processo de recolha de dados, este estudo usa técnicas próprias para uma investigação qualitativa: observação, diário de bordo, recolha documental e de registos aúdio.

Observação. A observação é um processo que permite recolher informação direta e em primeira mão sobre o objeto em estudo. Na observação, o investigador pode usar o seu diário de bordo e ir registando o que observa, ou então fazer-se valer de gravadores de áudio e de vídeo. Bogdan e Biklen (1994) referem-se ao registo de ideias, estratégias, reflexões, palpites e padrões que possam emergir como notas de campo da observação. De acordo com estes autores, um resultado bem-sucedido de um estudo de observação participante baseia-se em notas de campo detalhadas e precisas. Referem ainda que quando as ações dos participantes são observadas no seu ambiente natural, a compreensão da situação é facilitada.

Como professora e investigadora, fui eu a recolher diretamente os dados, por observação participante no ambiente natural dos alunos, não se encontrando na sala ninguém para além de mim e os próprios alunos. Como forma de registo da observação utilizei o diário de bordo (Anexo VIII), um para cada aula, onde registei as intervenções de cada par e a hora, com opções de várias caraterísticas de participação. Desta forma, consegui registar em tempo real, ou imediatamente a seguir ao términus da aula, como os alunos aderiram às tarefas, bem como o modo como decorreu o trabalho, permitindo-me reestruturar e adequar o processo de realização da unidade de ensino.

Diário de bordo. O diário de bordo constitui o instrumento "onde o investigador regista os acontecimentos relevantes que vão surgindo no decurso do trabalho, bem como as ideias e preocupações que lhe vão surgindo" (Ponte, 2002, p. 14). Nesta investigação, a observação tem como objetivo compreender as aprendizagens e as dificuldades manifestadas pelos alunos durante a realização das tarefas, para que seja possível perceber como estes estruturam o seu raciocínio geométrico, formam as suas conjeturas e idealizam as suas generalizações, interligando as aprendizagens recentes com as anteriores, recorrendo ao ambiente de geometria dinâmica *GeoGebra*.

Recolha documental e de registos áudio. A recolha de dados incidiu também nos registos em papel que os alunos fazem nos enunciados das tarefas, nos registos dos alunos das capturas de ecrã (*printscreen*) em ficheiros *Word* e nas gravações de áudio. Cada computador portátil está equipado com o programa de gravação de áudio *Windows Media*, com o *software* de geometria dinâmica *GeoGebra* e com o *Microsoft Office 2007*, tendo sido utilizadas estas ferramentas em todas as aulas. Em cada aula da intervenção, dois pares tiveram a oportunidade de gravar em áudio a partir do seu portátil, com o cuidado de abranger toda a dimensão da sala.

A observação com registo áudio a partir dos computadores portáteis, onde as atividades são realizadas, foi um dos métodos de recolha de dados mais importantes para este estudo. Recorrendo aos registos áudio pude observar auditivamente as discussões dos alunos sobre os conceitos aprendidos, permitiu-me conhecer melhor a dinâmica de trabalho do par sobre as interações com o programa *GeoGebra*, compreender como os alunos interpretaram os enunciados, as estratégias que usaram, como utilizaram os conhecimentos anteriormente adquiridos e, por fim, as dificuldades que sentiram em concretizar as atividades propostas nas tarefas e as opções tomadas relativamente às estratégias. Estes registos forneceram-me dados que não teriam sido percetíveis através da análise das resoluções escritas, nem das capturas de ecrã gravadas nos ficheiros *Word*. Tem ainda a vantagem de constituir uma oportunidade de recolher dados importantes e detalhados, resultantes da observação de contextos naturais, possibilitando a obtenção de relatos de situações na própria linguagem dos participantes, o que dá acesso aos conceitos que eles usam no quotidiano.

As resoluções das tarefas por escrito e a consulta dos ficheiros *Word,* onde os alunos foram guardando as capturas de ecrã à medida que foram construindo, permitiu-me analisar e identificar os conhecimentos de Geometria, a forma como os alunos interagiram com o ambiente de geometria dinâmica *GeoGebra*, as estratégias utilizadas e as dificuldades por eles sentidas.

Assim, nesta análise, o meu interesse enquanto investigadora centrou-se mais nos processos do que nos resultados ou produtos conseguidos pelos alunos. Tendo em conta as questões do estudo interessou-me particularmente como é que os alunos conjeturaram as propriedades da unidade de ensino e desenvolveram as suas justificações e demonstrações.

4.4. Fases do estudo

O estudo foi realizado entre novembro de 2017 e outubro de 2018, iniciando-se com a elaboração da introdução, indicando a motivação e a pertinência do estudo, com a apresentação do objetivo e das questões a que me propus responder, bem como uma primeira planificação da organização do estudo, estabelecendo um plano de ação para as diversas fases. Esta primeira calendarização encontra-se resumida na tabela 3.

Tabela 3 – Fases do estudo (calendarização)

Fases do estudo	nov.	dez.	jan.	fev.	mar.	abr.	mai.	jun.	jul.	ago.	set.
Introdução											
Revisão da literatura											
Planeamento das tarefas											
Metodologia de Investigação											
Exploração das tarefas											
Avaliação e Análise											
Conclusões											
Escrita da Tese											
Entrega da Tese											

Procedi depois ao início da revisão de literatura relativa ao tema em estudo e às metodologias de investigação em educação, procedendo em simultâneo ao planeamento das tarefas, uma vez que a unidade de ensino em causa estava planificada em sede de grupo para ser lecionada no início do 2.º período letivo. O fim desta fase coincidiu também com a preparação da aplicação do estudo na escola tanto ao nível de requisição de equipamentos como de obtenção de autorizações.

A segunda fase do estudo foi a exploração das tarefas que decorreu em simultâneo com a recolha de dados durante as aulas, com a participação de todos os alunos. A avaliação dos alunos sob a forma de realização da Ficha de Trabalho para Avaliação finalizou esta fase.

Posteriormente, iniciei a análise dos dados recolhidos com a consulta dos diários de bordo e com a audição das gravações áudio. Consegui assim reconstituir o desenvolvimento da aula, identificar os alunos que tinham tido uma participação mais destacada e captar as suas intervenções. Em seguida, recorri aos ficheiros *Word* e aos enunciados das tarefas para analisar em pormenor o trabalho dos alunos. Apesar de todos os alunos terem participado, para a análise das resoluções das tarefas foram selecionados apenas os alunos cujas resoluções me pareceram mais interessantes no sentido de concretizar o objetivo do estudo. Com o objetivo de salvaguardar as garantias dadas aos encarregados de educação todos os nomes utilizados na análise de dados são fictícios.

A análise de dados constituiu, essencialmente, uma análise de conteúdo, visando identificar aspetos relevantes, relativamente a cada uma das questões do estudo. Reunindo as análises das descrições das tarefas com a análise da avaliação iniciei o processo de construção das conclusões e a escrita da tese, tendo por meta a finalização e a entrega até ao final do mês de setembro.

4.5. Questões éticas

Em todo o processo do trabalho, tive em conta a Carta Ética para a Investigação em Educação e Formação e o Regulamento da Comissão de Ética para a Investigação em Educação e Formação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, aprovados pelo Conselho Científico do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa na sua reunião de 21 de janeiro de 2016, constituindo a sua Deliberação Nº 52, publicada em Diário da República, 2.ª série, a 15 de março de 2016 constituindo os Anexos I e II da Deliberação n.º 453/2016.

Iniciei por solicitar autorização da Diretora do Agrupamento (Anexo I), com tomada de conhecimento à delegada de grupo e à coordenadora de Departamento. Esta autorização foi prontamente concedida. Por último, pedi autorização aos encarregados de educação (Anexo II) para a realização da investigação com os seus educandos, antecipando a utilização dos meios de recolha de dados a privilegiar e outros, garantindo que as imagens e as produções áudio não seriam divulgadas bem como o anonimato dos alunos participantes e o uso das imagens exclusivamente para a investigação. Todos os alunos me fizeram chegar as autorizações dos respetivos encarregados de educação e participaram no estudo.

Capítulo V

Resultados

Este capítulo consiste essencialmente na descrição do desenvolvimento da unidade de ensino e na sua análise. Está dividido em oito subcapítulos, cada um dos primeiros sete diz respeito a uma tarefa e o oitavo e último incide sobre a ficha de trabalho para avaliação.

Na análise procuro examinar o desenvolvimento das aulas em que foram aplicadas as tarefas e estabelecer relações entre os resultados observados e o objetivo e as questões do estudo.

Para finalizar o capítulo interpreto o desempenho dos alunos na Ficha de Trabalho para Avaliação.

5.1. Tarefa 1 – Circunferência – relação entre comprimento do arco, área do setor circular e amplitude do respetivo ângulo ao centro

No início da aula, relembrei algumas definições já abordadas em anos anteriores, nomeadamente de área e perímetro de um círculo, grandezas diretamente proporcionais, ângulo ao centro e setor circular, questionando os alunos do que se recordavam e construindo as definições com base nesse conhecimento prévio. Em seguida, introduzi as definições de arco de circunferência, corda, arcos subtensos e arco correspondente a corda (Anexo IV) .

Os alunos iniciaram depois a construção da circunferência seguindo os passos 1 a 4 indicados no enunciado, finalizando com um print no passo 5 (Figura 4). Refira-se que a escolha dos pontos A e B foi completamente aleatória para cada par de alunos, pelo que o comprimento do raio também se pode considerar aleatório uma vez que depende diretamente da escolha dos pontos A e B.

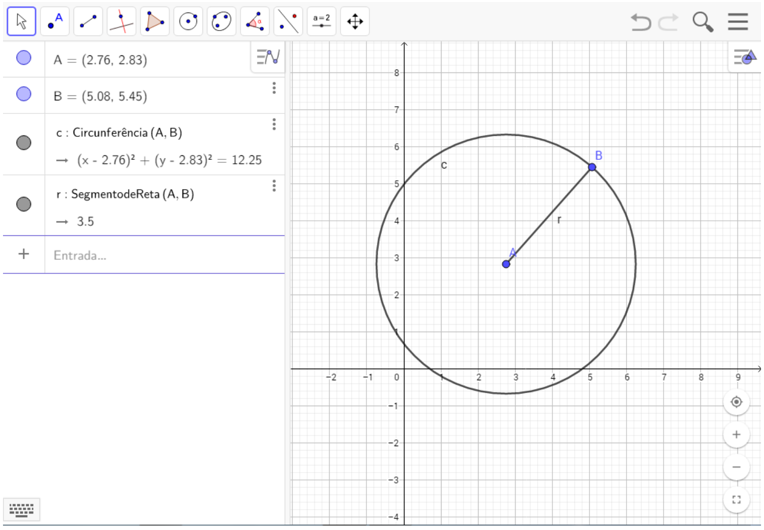


Figura 4 – Construção da circunferência por Alexandre e Alice.

Os alunos continuaram depois para a construção do arco de circunferência, escolhendo aleatoriamente pontos sobre a circunferência para definir um arco, finalizando mais uma vez com um print no passo 8 (Figura 5). Até este ponto os alunos chamaram-me para ajudar sobretudo em aspetos técnicos do programa *GeoGebra*, seguindo as indicações com interajuda entre cada par.

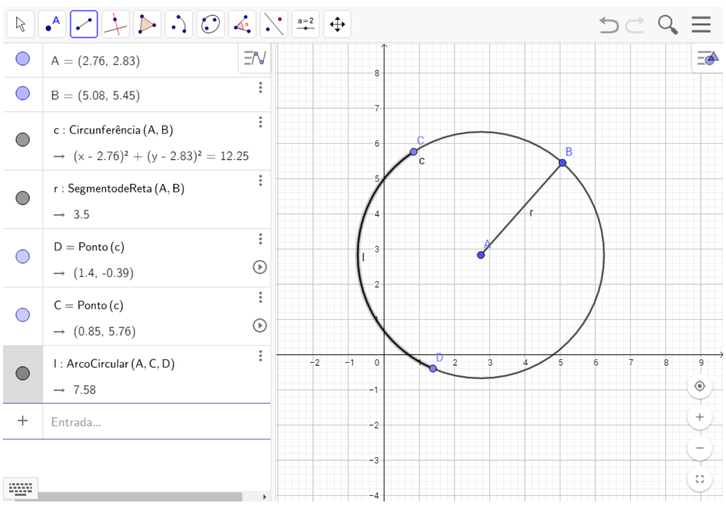


Figura 5 – Construção do arco de circunferência por Alexandre e Alice (passo 8).

Para a construção do ângulo ao centro, cada par foi seguindo os passos 9 e 10 terminando com um print no passo 11. Supervisionando o trabalho desenvolvido, constatei que, em quatro casos, os alunos não estavam a construir o ângulo ao centro de forma a que este correspondesse ao arco anteriormente traçado. Fiz então uma chamada de atenção a toda a turma para a importância das três entidades a construir (arco, ângulo ao centro e setor circular) serem correspondentes entre si, estando o arco compreendido entre os lados do ângulo, para que se pudessem estabelecer relações entre eles. Com cada par de alunos a seguir o seu ritmo, passados cerca de 45 minutos da aula, já se notava algum desfasamento, estando alguns deles mais à frente na consecução da tarefa. E foi neste ponto que terminou a primeira sessão de trabalho.

No dia seguinte, teve lugar mais uma sessão de 90 minutos. No final da sessão anterior os computadores portáteis foram identificados por cada par de alunos no exterior da pasta o que facilitou a distribuição e o regresso ao trabalho. Retomando a partir do ponto em que se tinha ficado, a maioria dos pares situava-se na construção do setor circular (Figura 6).

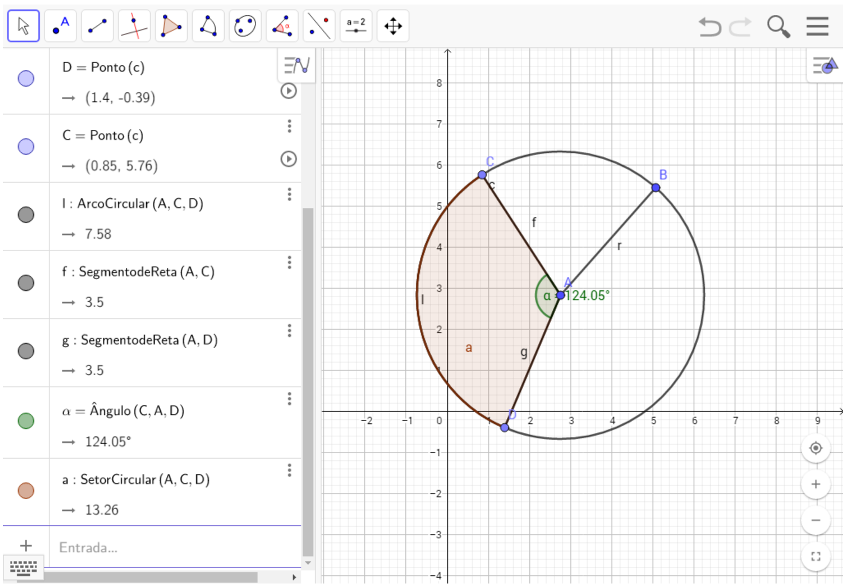


Figura 6 – Construção do setor circular por Alexandre e Alice (passo 13)

Alguns alunos, ainda antes de serem convidados a investigar e a procurar regularidades, começaram a dar-se conta que as três entidades ou as medidas associadas estavam relacionadas entre si:

Luísa: Isto está claramente tudo ligado...
Professora: O quê?
Luísa: Estas medidas todas... Se mexermos o ponto C ou o D, isto muda tudo...
Professora: Muda tudo, como?
Luísa: Isso ainda não sei. Só o raio é que fica na mesma, mudamos o ângulo, muda logo tudo o resto...
Pedro: Aqui connosco acontece também isso...
Professora: E já descobriram se muda obedecendo a algum padrão?
Pedro: Não...
Professora: Se preencherem essa tabela, talvez ajude a encontrar...

Então, os pares de alunos foram procedendo ao registo dos seus dados na tabela apresentada na alínea a), deslocando os pontos B, C e D, alterando assim o raio, a amplitude do ângulo, o comprimento do arco e a área do setor circular. Os valores do raio (r), da amplitude do ângulo ao centro (α), do comprimento do arco CD (l), e da área do setor circular surgem na folha algébrica da construção, como se pode constatar na Figura 3. Assim os alunos tinham apenas de determinar o perímetro da circunferência (P) e a área do círculo (A) e as razões sugeridas nas linhas de ordem quatro, seis, oito e dez.

Raio r	4,33	4,33	4,33	2,85	8,06
Amplitude de α	287,03°	277,91°	295,22°	295,22°	295,22°
Comprimento do arco CD (l)	21,63	20,99	22,3	14,71	41,54
$\frac{l}{\alpha}$	0,076	0,076	0,076	0,05	0,14
Perímetro da circunferência (P)	27,21	27,21	27,21	17,91	50,64
$\frac{P}{l}$	1,26	1,3	1,22	1,22	1,22
Área do setor circular (a)	46,91	45,42	48,25	21	167,45
$\frac{a}{\alpha}$	0,163	0,163	0,163	0,07	0,57
Área do Círculo (A)	58,9	58,9	58,9	25,52	102,07
$\frac{A}{a}$	1,26	1,3	1,22	1,22	0,61

Figura 7 – Tabela da alínea a) de Catarina e Pedro.

A Figura 7 mostra o trabalho de dois alunos, Catarina e Pedro. Observa-se que estes alunos variaram a sua construção inicial mantendo o raio e alterando a amplitude do ângulo ao centro nos três primeiros registos (três primeiras colunas) e nos dois últimos alteraram o raio e mantiveram o ângulo em relação ao terceiro. Por esse motivo conseguiram formular desde logo algumas conjeturas.

À medida que os alunos foram preenchendo a tabela, foram levantando novas hipóteses e formulando conjeturas adicionais que iam registando na alínea b). Passado o tempo previsto para a execução da tarefa passámos à discussão coletiva. Desafiados por mim a apresentar as suas conjeturas os alunos começaram:

Pedro: Quando não alteramos o raio, o valor de $\frac{l}{\alpha}$ não se altera.
Ana: Aqui também está assim...

A restante turma parecia concordar anuindo com a cabeça. Aparentemente, todos os alunos observavam essa regularidade nas suas tabelas, ou seja, que, para um determinado raio, o quociente entre o comprimento do arco e a amplitude do ângulo se mantinha constante. A discussão prosseguiu:

Professora: Continua, Pedro. Vocês têm mais? (registando no quadro o que era dito)
Pedro: Sim, quando mantemos o ângulo e mesmo quando mudamos o raio, $\frac{P}{l}$ e $\frac{A}{a}$ são iguais.
Maria: Aqui também, portanto o raio não tem nada a ver, tem de ser por causa do ângulo...
Marta: Professora, nós experimentámos com uns números e achamos que quando o ângulo aumenta, o valor diminui, se pusermos aqui trezentos e tal, fica quase um e subimos o ângulo e tá cada vez mais 1...
Professora: Meninos, estão a entender o que a Marta está a querer dizer? Experimentem vocês, para ver se concordam...
Micaela: Eu não percebi...

Da análise dos dados recolhidos nas tabelas, em particular, o Pedro disse que os quocientes entre o perímetro do círculo e o comprimento do arco e entre a área do círculo e a área do setor circular eram iguais, o que a Maria também confirmou observar nos seus dados. Aliás, ambos observaram que essa propriedade continuava invariante mesmo que o raio fosse diferente. Então a Marta avançou na discussão dizendo que, sendo assim, o quociente devia depender unicamente da amplitude do ângulo, já que a alteração do raio não influenciava. Então, foi simulando com vários valores a aproximar-se da amplitude do ângulo giro e então constatou que o valor se aproximava da unidade.

Neste ponto, constatei que, para alguns alunos, estava a ser veiculada muita informação que não estavam a compreender, apesar da informação estar a ser registada no quadro e discutida coletivamente. Portanto incentivei a restante turma a fazer simulações análogas para que todos tivessem oportunidade de visualizar a regularidade nas suas construções explicando como o deveriam fazer:

Professora: Desloca os pontos C e D para fazeres ângulos cada vez mais perto do 360 e vê o que acontece aos quocientes $\frac{P}{l}$ e $\frac{A}{a}$.

Passados alguns minutos, enquanto uns verificavam e outros reviam os seus cálculos, teve lugar o seguinte diálogo:

Micaela: Já vimos, então tem a ver com o 360...
Pedro: Acho que descobri, descobri! Isto é o 360 a dividir pelo ângulo! Já fiz com 3 das minhas coisas e deu sempre!
Professora: Meninos, todos concordam?
(a maioria afirmou que sim)
Professora: Então como vamos escrever isso?
Pedro: Então fica $\frac{P}{l} = \frac{360}{\alpha}$ e $\frac{A}{a} = \frac{360}{\alpha}$ ... (e a professora ia registando no quadro)
Professora: Muito bem, meninos, estão a ir muito bem! Há alguma dúvida, alguém perdido por aí?
Micaela: Ai, professora! Isso já é muita letra...
Professora: Vamos lá, é só generalizar o que já vimos! Então usando as fórmulas do perímetro e da área do círculo tentem lá ver se damos resposta à alínea c)...

Alguns pares facilmente resolveram a proporção e deduziram que $l = \frac{\alpha \pi r}{180}$, como se pode verificar pela resolução da Rita e do João (Figura 8).

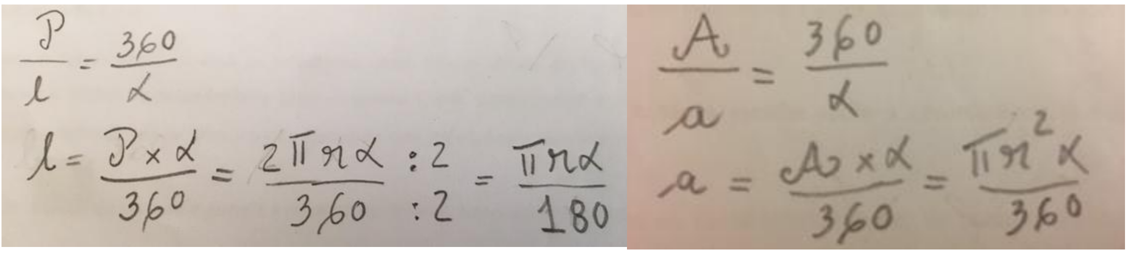


Figura 8 – Dedução das fórmulas para o cálculo do comprimento de um arco e da área de um setor circular em função da amplitude do ângulo ao centro correspondente por Rita e João.

No entanto, a maioria dos alunos começou a não conseguir acompanhar o que se estava a passar, revelando a sua dificuldade em “trabalhar” com diversas variáveis em equações. Então sugeri que substituíssem P pelo perímetro do círculo e A pela área do círculo. Apercebi-me que alguns alunos avançavam, outros ainda não. Ainda assim, alguns alunos mostraram dificuldade em saber por onde começar a resolver as proporções resultantes da minha sugestão, possivelmente por ainda haver duas variáveis distintas em cada proporção. Então optei por dar mais uma sugestão:

Professora: Se vos faz confusão assim ponham no formato da regra de três simples, por exemplo assim... (e fiz eu própria isso no quadro – Figura 9)
Micaela: Assim está melhor... E agora?
Professora: Agora, resolvemos em ordem a l, queremos isolar o l, e na de baixo fazemos isso com o A.

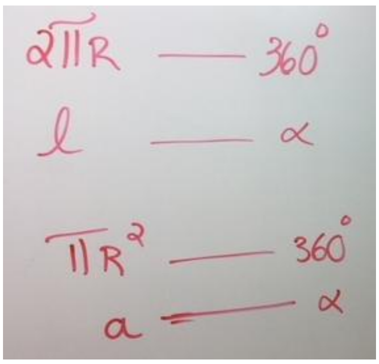


Figura 9 – Sugestão da professora de uso de uma estratégia aritmética para contornar a dificuldade dos alunos em usar o pensamento algébrico (expressões com variáveis).

A maioria dos pares de alunos conseguiu chegar às expressões que dão o comprimento do arco e a área do setor circular em função do raio e do ângulo por esta via (Figura 10).

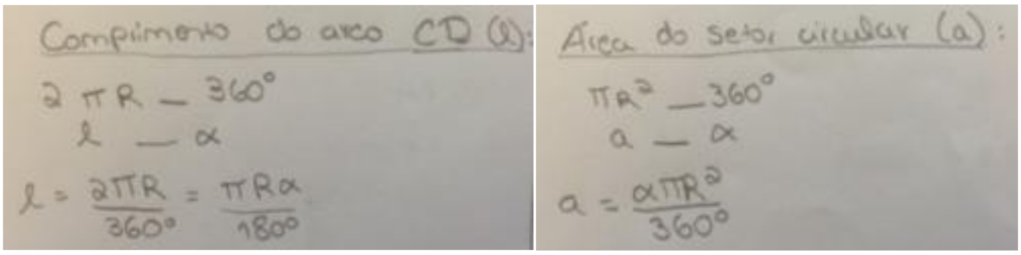


Figura 10 – Dedução da fórmula para o cálculo do comprimento de um arco e para o cálculo da área de um setor circular, em função da amplitude do ângulo ao centro correspondente por parte de Sara e Rúben.

Apenas um dos pares não o conseguiu. Mesmo com a minha sugestão mais aritmética, os alunos deste par não conseguiram ultrapassar a dificuldade. Chamaram-me e apenas com um acompanhamento muito direcionado conseguiram obter as expressões pretendidas.

A partir daqui, procurei levar os alunos a relacionar entre si as expressões que dão o comprimento do arco e a área do setor circular em função do raio e do ângulo:

Professora: Vejamos então a alínea d)! Alguém chegou a ter alguma ideia? Se não, olhem atentamente para as duas fórmulas que vocês descobriram.
Sara: A do comprimento tem um r a menos mas não sei se podemos fazer isso...
Professora: Isso, o quê? O que sugeres?
Sara: Se multiplicarmos a do l por r já fica ao quadrado.
Professora: E chega? Já fica bom?
Marta: Não, numa está 360 e na outra 180, temos de multiplicar a do l por 2 em baixo...

E então registei no quadro as sugestões das alunas (Figura 11), onde se evidencia que as duas grandezas são diretamente proporcionais com razão $\frac{r}{2}$. Os alunos deduziram esta expressão por comparação das duas fórmulas já encontradas numa alínea anterior, constando que, para o cálculo da área, temos o quadrado do raio e no denominador temos 360 $\left(a = \frac{\alpha\pi r^2}{360}\right)$ e que, para o cálculo do comprimento do arco, temos apenas o raio e no denominador temos 180 $\left(l = \frac{\alpha\pi r}{180}\right)$. Desta forma, os alunos constataram que, multiplicando a expressão do comprimento do arco por $\frac{r}{2}$, se obtém a expressão da área do setor circular. E assim terminou esta sessão de trabalho, mesmo em cima do términus da aula.

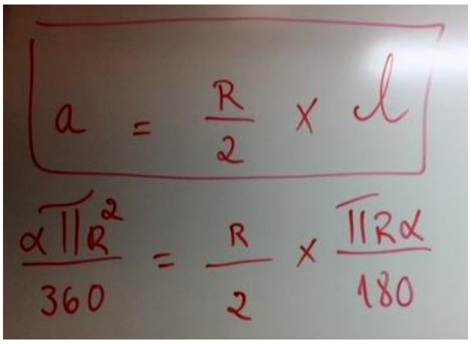


Figura 11 – Registo no quadro atendendo às sugestões das alunas Sara e Marta.

Análise. Desde o início da resolução da tarefa, os alunos mostraram-se interessados e motivados, procurando seguir o guião das construções geométricas. Os alunos tomaram consciência de que havia propriedades invariantes nas figuras, ou seja, que independentemente dos pontos que selecionassem à partida, essas propriedades iam sempre verificar-se e começaram a encontrar regularidades.

As suas estratégias consistiram, essencialmente, em efetuar as construções sugeridas e em observar o resultado dessas construções, procurando encontrar regularidades. Durante as construções, quatro dos pares de alunos não estavam a selecionar o arco de circunferência e o sector circular correspondentes ao ângulo ao centro identificado, o que os impedia de constatar regularidades, ao invés desses estavam a identificar estas entidades ao ângulo de amplitude igual à diferença entre a amplitude do ângulo giro e a amplitude do ângulo ao centro (por vezes referido na literatura brasileira como "ângulo replementar"). Os alunos nestas circunstâncias verificaram que algo não estava a correr como suposto e chamaram-me. Identificado o problema os próprios alunos alteraram a seleção para que ângulo ao centro, arco de circunferência e sector circular correspondessem entre si.

No entanto, no decurso desta tarefa surgiu a dificuldade em resolver equações literais com várias variáveis. Esta foi, claramente, a grande dificuldade que se registou na realização desta tarefa. As variáveis envolvidas eram em número elevado, tinham um aspeto confuso do ponto de vista do aluno, com "muita letra" como Micaela expressou. Neste ponto, sugeri aos alunos que substituíssem P (perímetro do círculo) por $2\pi r$ e A (área do círculo) por πr^2. Esta sugestão ajudou alguns alunos mas outros ainda permaneceram incapazes de superar o desafio e nesse ponto aconselhei que recorressem a um procedimento mais algébrico, a regra de três simples como se observa na figura 6. Com as minhas sucessivas sugestões, todos os pares conseguiram cumprir o objetivo, com exceção de um, ao qual fiz uma explicação personalizada e individualizada do deduzido pela turma coletivamente. Este par revela desde há vários anos dificuldades nas aprendizagens, evidenciadas frequentemente também ao nível do raciocínio indutivo e dedutivo.

Os alunos chegaram a todas as generalizações visadas na tarefa, constatando a igualdade dos quocientes entre o perímetro do círculo e o comprimento do arco, entre a área do círculo e a área do setor circular e entre a amplitude do ângulo giro e a amplitude do ângulo ao centro (Figura 5), instigados a resolver as equações obtidas em ordem a l (comprimento do arco) e a a (área do setor circular). Quanto à relação entre as duas expressões obtidas $\left(l = \frac{\alpha\pi r}{180} \text{ e } a = \frac{\alpha\pi r^2}{360}\right)$ não se verificaram dificuldades. A visualização do quadro permitiu que todos os alunos compreendessem a generalização segundo a qual se obtém a expressão da área do setor circular multiplicando a expressão do comprimento do arco pela metade do raio $\frac{r}{2}$. O facto de os alunos terem total liberdade de construção deu significado às generalizações que surgiram com a ajuda do registo de dados. Estas foram surgindo empiricamente, de forma indutiva, a partir da igualdade dos quocientes.

As justificações constituíram o maior desafio desta tarefa. Foram, no entanto, bem conseguidas graças à minha insistência e sugestões de métodos para se obter e justificar as generalizações pretendidas, demonstrando as fórmulas de cálculo do comprimento de um arco de circunferência e da área de um setor circular. Recorrendo a procedimentos algébricos ou aritméticos (como a regra de três simples), os alunos verificaram que estas grandezas são diretamente proporcionais à amplitude do respetivo ângulo ao centro. Verificaram ainda a forma como o comprimento de um arco e a área do setor circular que lhe corresponde se relacionam, neste caso por comparação das expressões anteriormente obtidas.

5.2. Tarefa 2 – Circunferência – relações entre ângulos ao centro, arcos e cordas correspondentes

Animados por, mais uma vez, irem utilizar os computadores portáteis e o programa *GeoGebra* nas aulas de Matemática, alguns alunos ofereceram-se para colaborar comigo na distribuição dos dispositivos informáticos pelos colegas. Distribuí as tarefas aos pares de alunos, que começaram de imediato a trabalhar. Notou-se da sua parte uma maior desenvoltura na forma de trabalhar com o programa. Os alunos já conheciam a localização dos botões e a construção que cada um permite efetuar. Assim, a construção da circunferência e de duas cordas com o mesmo comprimento foi rápida (cerca de 20 minutos), seguindo os passos 1 a 8. A partir das cordas, os alunos tinham de construir e medir os arcos correspondentes a essas cordas, bem como os ângulos ao centro correspondentes (Figura 12).

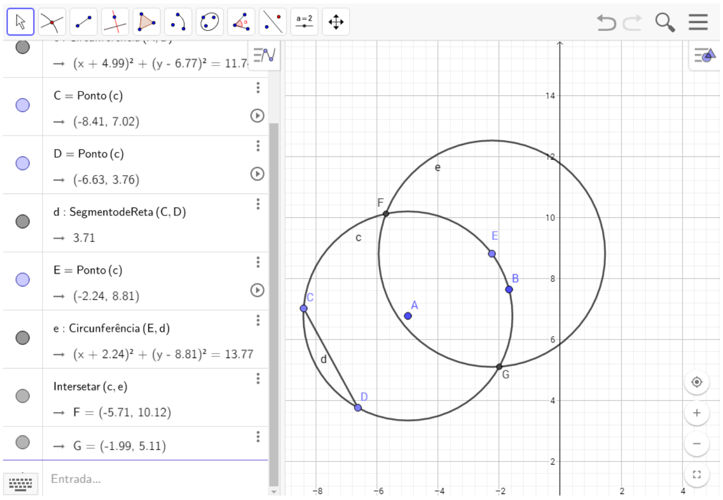


Figura 12 – Construção efetuada por Micaela e Nuno (passo 8)

A partir desta construção de base, a tarefa sugeria que se procurassem relações entre arcos correspondentes a cordas com o mesmo comprimento e entre ângulos ao centro também correspondentes a cordas nessas condições. A partir daqui, cada par de alunos construiu os ângulos e os arcos a comparar. No exemplo da figura 13, verifica-se, inclusivamente algum cuidado em assinalar, usando cores, os objetos construídos para melhorar a capacidade de visualização, o que não era sugerido no enunciado da tarefa mas que constatei em algumas folhas de registo dos alunos.

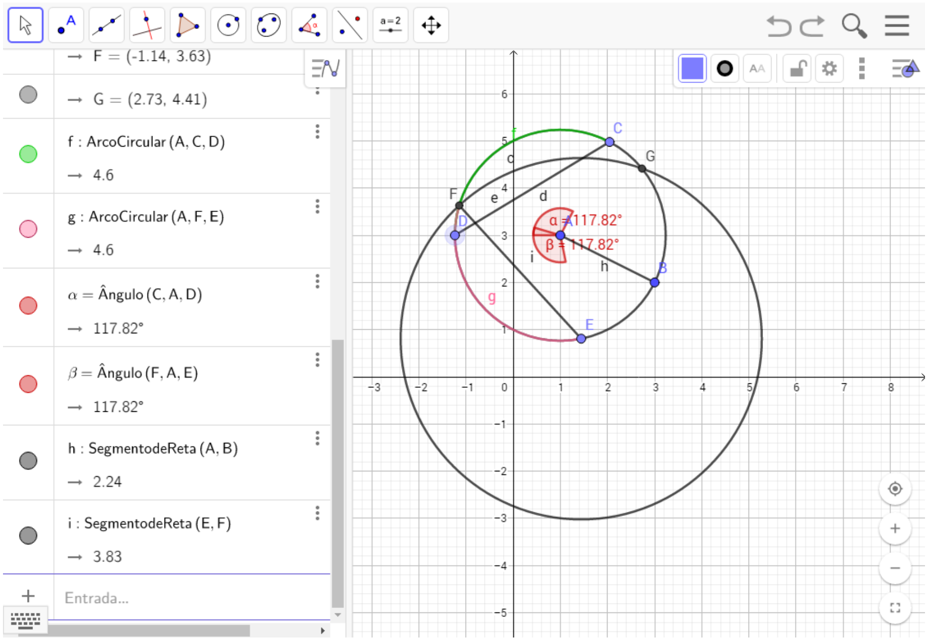
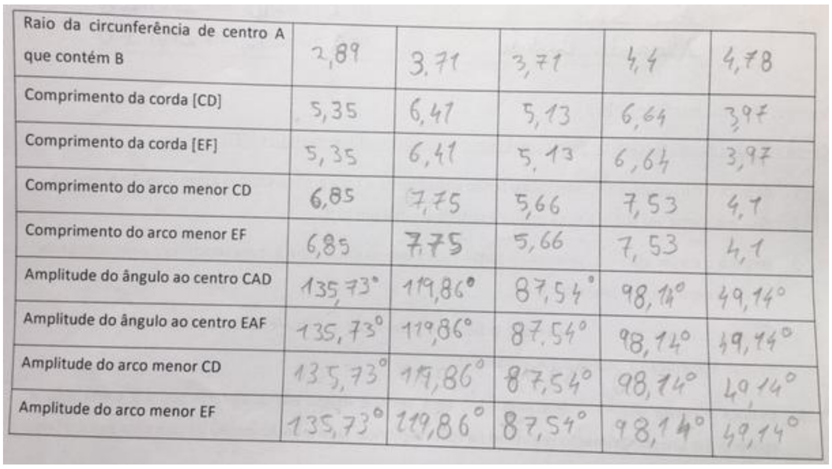


Figura 13 – Construção dos arcos e ângulos ao centro a comparar efetuada por Manuel e Carlos (passo 8)

Mais uma vez, a liberdade de manipular o raio da circunferência e os pontos que definem as cordas, mantendo-as no entanto com o mesmo comprimento, permitiu a cada par de alunos o preenchimento de uma tabela em que várias medidas foram registadas a partir dos dados fornecidos pela folha algébrica associada a cada folha gráfica, como se observa na Figura 14. No entanto, alguns dos pares de alunos, cerca de metade, manifestou que não considerava necessário o preenchimento da tabela, pois conseguiam tirar as conclusões apenas observando as movimentações que davam às construções com o deslocar dos pontos. A esta sugestão, respondi que, para podermos conjeturar, era importante termos um elevado número de situações.

Efetivamente, das suas construções e movimentações dadas aos pontos, os alunos verificaram que, mantendo os comprimentos das duas cordas iguais, os comprimentos dos arcos menores seriam iguais e que o comportamento dos comprimentos dos arcos maiores era análogo, bem como também ficariam iguais as amplitudes dos ângulos ao centro correspondentes às cordas iguais. Na tabela abaixo (Figura 14) é possível constatar que os alunos tiveram o cuidado de fazer variar o raio (da coluna 1 para a coluna 2) e também manter o raio e alterar o comprimento das cordas iguais (da coluna 2 para a coluna3) para averiguar se a conjetura se mantinha.



Raio da circunferência de centro A que contém B	2,89	3.71	3,71	4,4	4,78
Comprimento da corda [CD]	5,35	6,47	5,13	6,64	3,97
Comprimento da corda [EF]	5,35	6,41	5,13	6,64	3,97
Comprimento do arco menor CD	6,85	7,75	5,66	7,53	4,1
Comprimento do arco menor EF	6,85	7,75	5,66	7,53	4,1
Amplitude do ângulo ao centro CAD	135,73°	119,86°	87,54°	98,14°	49,14°
Amplitude do ângulo ao centro EAF	135,73°	119,86°	87,54°	98,14°	49,14°
Amplitude do arco menor CD	135,73°	119,86°	87,54°	98,14°	49,14°
Amplitude do arco menor EF	135,73°	119,86°	87,54°	98,14°	49,14°

Figura 14 – Tabela de Maria e Marcelo.

Cada par de alunos registou dados relativos a cinco situações diferentes, o que significa que se obtiveram desta forma setenta registos em que as propriedades se verificam. Chamados por mim a divulgar os dados obtidos, a discussão iniciou-se:

Nuno: Isto dá sempre igual!

Professora: Clarifica, Nuno! O que é igual, assim ninguém entende...

Nuno: Eu experimentei vários raios e os comprimentos das cordas construídas deram sempre iguais, os comprimentos dos arcos também e as amplitudes dos ângulos e dos arcos também.

Professora: Onde vês isso?

Micaela (par de Nuno): Os números das linhas são iguais, a 2 e a 3, a 4 e a 5, a 6 e a 7, a 8 e a 9. São iguaizinhas.

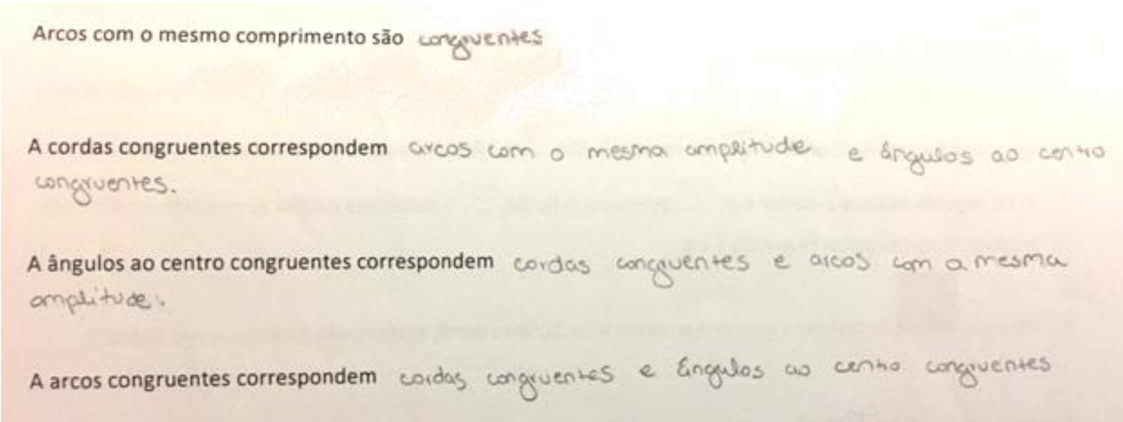
Maria: Nós também experimentámos manter o raio e aconteceu o mesmo.

Professora: Aconteceu isso com todos?

(a turma, como um todo, concluiu)

Professora: Então vamos lá a generalizar, preencham lá os espaços abaixo da tabela...

A maioria dos pares já tinha realizado essa atividade, de uma forma geral em tudo semelhante à da figura 15 como se pode observar na página seguinte.


Arcos com o mesmo comprimento são congruentes

A cordas congruentes correspondem arcos com o mesma amplitude e ângulos ao centro congruentes.

A ângulos ao centro congruentes correspondem cordas congruentes e arcos com a mesma amplitude.

A arcos congruentes correspondem cordas congruentes e ângulos ao centro congruentes

Figura 15 – Conclusões de Tomás e Madalena.

Então, continuei, questionando:

Professora: Agora temos de pensar porque é que isto acontece. Porque será?
(seguiu-se silêncio)
Professora: Vamos lá a analisar a construção, o que construímos?
Pedro: Então, uma circunferência e duas cordas com o mesmo comprimento, diz lá no enunciado.
Professora: Se uníssemos os pontos C e D ao centro, o que obtínhamos?
A turma: Um triângulo...
Professora: E se fizéssemos o mesmo com o E o F?
A turma: Outro triângulo...
Professora: E o que poderíamos dizer sobre esses dois triângulos?
Sara: Eu acho que são iguais, vê-se...
Professora: Vê-se não é uma boa resposta, porque é que são iguais? Temos critérios para justificar isso, não temos?
Sara: Já sei, é o AA.
Professora: Esse é um critério de semelhança. Poderia ser ALA. Quais são os ângulos iguais?
Catarina: Não, esse não dá, tem de ser o LLL. Só sabemos um ângulo, não temos dois.
Professora: Explica melhor, se faz favor!
Catarina: Então as cordas são iguais, os outros lados são todos raios, portanto os lados ficam todos iguais.

Professora: Alguém quer acrescentar mais alguma coisa? Completar, perguntar?

Sara: Pois é, por isso é que depois os ângulos do centro ficam iguais. Então e os arcos?

Professora: Espera um pouco. Concordam com a Catarina?

Nuno: O LAL não dava? Se o ângulo é igual e os lados, os raios, acho que esse também dava.

Professora: Concordam?

Marcelo: Eu acho que não...

Maria: Eu também acho que não.

Professora: Mas porquê?

Mariana: Não se sabia que os ângulos eram iguais, só vimos no fim de construir... Não se pode usar isso. O outro lado, a corda igual é que sabemos que é, sabemos que são iguais porque as "mandámos" ser assim, o ângulo veio depois.

Os alunos vêm que os triângulos obtidos por minha sugestão são iguais, gera-se alguma confusão na escolha do critério mas com as explicações de Catarina e Mariana, a confusão desvanece-se. Posto isto a turma revelou-se concordante com os argumentos apresentados, compreendendo que o único critério aplicável e que justifica a igualdade de triângulos é aquele que assenta na igualdade dos lados, uma vez que os triângulos constituídos pelas cordas iguais e por dois raios em cada triângulo ficam com os três lados iguais, de um para outro. A construção não assenta à partida na igualdade de quaisquer ângulos. A igualdade dos ângulos ao centro é uma consequência da igualdade dos lados dos triângulos, quando esta perceção permite concluir sobre a igualdade dos triângulos. Então, relembrei a questão de Sara:

Professora: Desculpem lá, meninos. Vamos concentrar e retomar, a Sara ainda há pouco levantou uma questão. Podes reformular, Sara?

Sara: Ai, professora, já nem me lembro...

Rúben (par de Sara): Os arcos... porque é que os arcos são iguais também.

Professora: Isso! Então vamos lá a pensar, pessoal!

Marcelo: Então porque os ângulos ao centro são iguais e a professora disse quando foi da outra tarefa que a amplitude do arco era igual à amplitude do ângulo ao centro, tenho isso aqui na folha...

Professora: Muito bem, Marcelo, tens razão, é só para ficar tudo esclarecido. Não queremos aqui ninguém com dúvidas, certo?

(risos)

Professora: Mas imaginem uma construção em que só sabíamos que os ângulos ao centro eram congruentes. Poderíamos concluir alguma coisa sobre os arcos e as cordas correspondentes?

(silêncio)

Mariana: Então os arcos eram iguais por causa daquilo que o Marcelo disse.

Professora: OK. E sobre as cordas?

Nuno: Agora já dá o LAL! Sabemos o ângulo e os lados à volta do ângulo...

Professora: “À volta”? Acho que esses lados têm um nome... (risos)

Nuno: Pois, adjacentes, acho eu...

Professora: Isso mesmo. Então e sendo os triângulos iguais, o que podemos concluir?

Rúben: Então, assim vemos que as cordas são iguais, e pronto. Por isso “tá” tudo ligado, umas coisas iguais levam às outras iguais.

Assim, os alunos compreenderam a reciprocidade da propriedade, ou seja, a cordas iguais correspondem ângulos ao centro iguais e arcos iguais e a ângulos ao centro iguais correspondem arcos iguais e cordas iguais. Quando se referia à “folha”, Marcelo reportava-se ao documento, anteriormente referido como resumo teórico (Anexo VI) que foi entregue aos alunos em branco e na qual, aula a aula, eles vão registando as definições (coluna da esquerda) que vão sendo mencionadas e as conclusões a que vamos chegando (coluna da direita) em discussão coletiva na sala de aula. Constata-se que os alunos revelam alguma dificuldade em justificar a igualdade de triângulos, e consequente igualdade dos ângulos ao centro, sabendo que as cordas são iguais. No entanto, numa situação hipotética levantada por mim em que se conhecia a igualdade dos ângulos ao centro, os alunos revelaram alguma facilidade em selecionar o critério adequado para justificar a igualdade dos triângulos e consequente igualdade das cordas, provavelmente devido ao clarificar da confusão ocorrida inicialmente com a escolha do critério na situação anterior. Assim terminou mais um bloco de noventa minutos, com os alunos a registar no referido documento as conclusões da aula e a realizar os exercícios do manual, sugeridos no final da tarefa.

Análise. As estratégias de construção, sugeridas no enunciado da tarefa, assentaram em construir uma figura de base constituída por uma circunferência e duas cordas, com a premissa destas terem o mesmo comprimento. À semelhança da Tarefa 1, os alunos foram chamados a manipular os elementos-chave da construção para obter uma quantidade significativa de exemplos relevantes. Da observação dos dados recolhidos e das construções efetuadas os alunos foram unânimes em conjeturar as propriedades que se pretendia com esta tarefa, ou seja, que arcos com o mesmo comprimento são congruentes e que a ângulos ao centro congruentes correspondem arcos e cordas congruentes, e vice-versa. Os alunos usaram raciocínio indutivo, a partir do observado, para generalizar. Para justificar as suas generalizações usaram, por minha sugestão, conhecimentos previamente adquiridos em anos letivos anteriores, a igualdade de triângulos, e também a uma definição já referida no contexto do capítulo que está a ser abordado, a de amplitude de um arco.

Na fase de construção não se verificaram quaisquer dificuldades. Apenas um constrangimento, alguns alunos (três pares) revelaram alguma tendência para diminuir o número de registos na tabela, manifestando-se muito confiantes nas suas conjeturas apesar de provirem de apenas duas ou três situações. Completaram a tabela, efetuando mais simulações, com alguma insistência da minha parte.

As generalizações de que arcos com o mesmo comprimento são congruentes e que a ângulos ao centro congruentes correspondem arcos e cordas congruentes, e vice-versa, surgiram empiricamente e foram formalizadas, de forma indutiva, com facilidade.

Quando, em contexto de discussão coletiva, os alunos foram chamados a justificar as suas generalizações e surgiram as verdadeiras dificuldades. Numa primeira solicitação de argumentos da minha parte, não surgiu qualquer participação, os alunos permaneceram calados sem saber como proceder, sem fazer qualquer sugestão para a forma de justificar. Então, solicitei aos alunos que relembrassem a construção inicial, a forma como tinham procedido numa tentativa que alguma sugestão surgisse. Sugeri que os alunos considerassem os segmentos de reta que unem os extremos das cordas ao centro da circunferência. Todos os alunos percecionaram a existência de dois triângulos, constatando imediatamente que estes eram iguais. Assim sendo, os ângulos ao centro teriam de resultar iguais. No entanto, na justificação da igualdade dos triângulos houve alguma confusão na seleção do critério de igualdade aplicável à situação, pois cada critério de igualdade pressupõe o conhecimento de determinados dados (lados ou ângulos) de ambos os triângulos e são os dados conhecidos à partida que determinam o nome do critério. Quando solicitei que justificassem a reciprocidade da propriedade a dificuldade já não se manifestou, os alunos identificaram de imediato o critério aplicável.

5.3. Tarefa 3 – Circunferência – reta tangente a uma circunferência, arcos e cordas entre retas paralelas e reta perpendicular a uma corda

Os alunos manifestam-se entusiasmados por mais uma vez a aula incidir na utilização dos computadores portáteis e do programa *GeoGebra*. Devido à identificação dos computadores na bolsa exterior da pasta a distribuição dos dispositivos informáticos pelos alunos decorre com a sua participação e de uma forma célere. Distribuí as tarefas aos pares de alunos, informando que tínhamos alguns conceitos a rever, nomeadamente os de reta tangente a uma circunferência, ponto de tangência, reta secante e reta exterior a uma circunferência. Estes conceitos integram o currículo da disciplina no 6.º ano mas, obviamente, houve necessidade de os rever. Esclarecidos os conceitos, os pares iniciaram a resolução da tarefa seguindo os passos 1 a 4 para a construção da circunferência, apresentando neste passo um print do passo anterior. Seguindo os passos 5 a 8 os alunos acrescentaram à construção inicial a reta tangente à circunferência, escolhendo aleatoriamente o ponto de tangência, isto é o único ponto comum à reta e à circunferência, tal como se pode observar na figura 16.

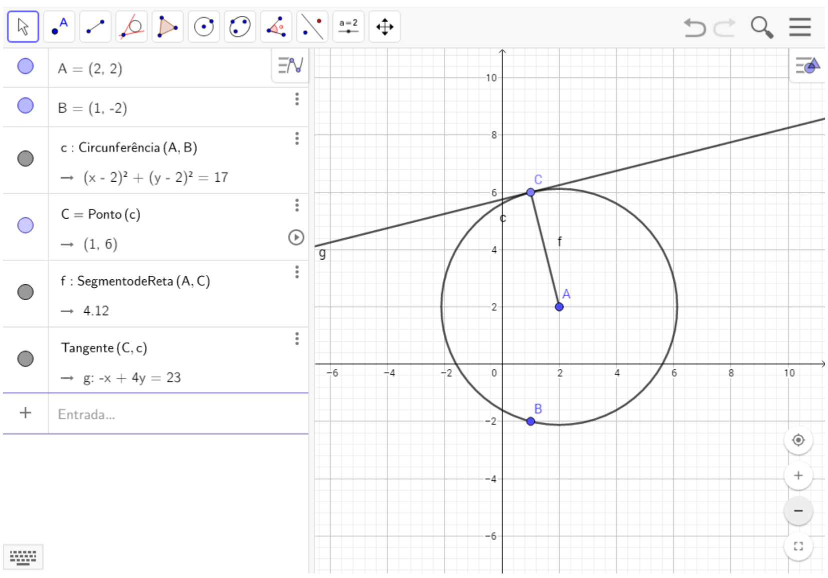


Figura 16 – Construção de Mário e Luísa (passo 8).

Na alínea a) da tarefa os alunos eram convidados a conjeturar sobre a amplitude do ângulo formado pela reta e pelo segmento de reta que contém o raio, no ponto de tangência. Os alunos foram unânimes em conjeturar que se trata de um ângulo reto. Na alínea b) deveriam verificar a conjetura medindo o ângulo em causa, seguindo os passos 9 a 12, tal como se pode observar na figura 17, numa das simulações sugeridas no último passo.

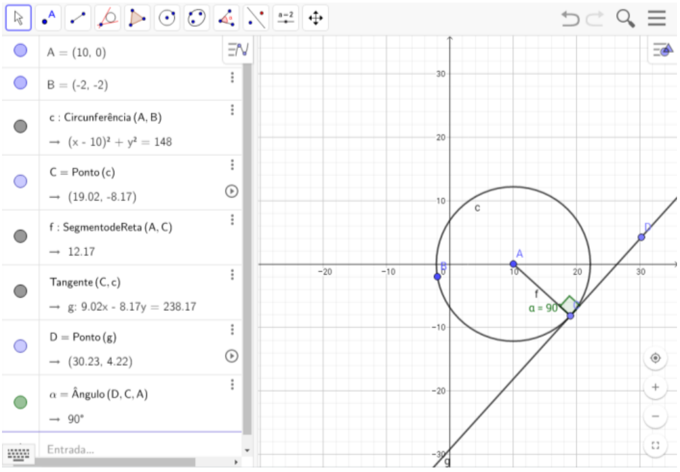


Figura 17 – Simulação 1 de Rita e João (passo 12).

Na alínea c) os alunos concluíram sem discussão que a reta tangente a uma circunferência forma com o raio que contém o ponto de tangência um ângulo reto, ou seja, a reta tangente é perpendicular à reta que passa no centro e no ponto de tangência.

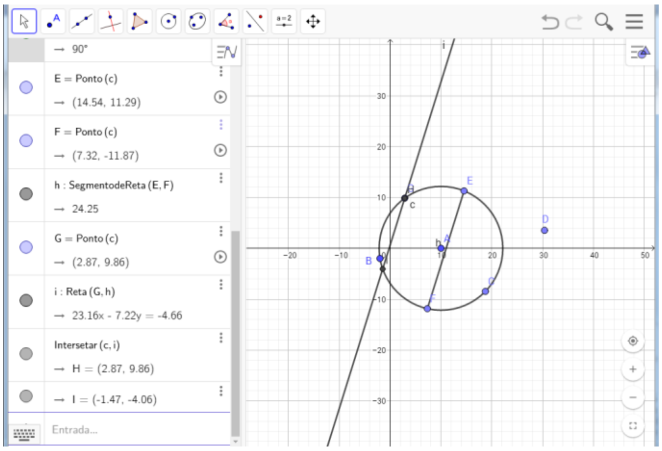


Figura 18 – Construção de André e Mariana de duas retas secantes à circunferência e paralelas entre si (passo 19).

Continuando com as construções, na senda de induzir a descoberta das relações entre os comprimentos de duas cordas cujos extremos se encontram em retas paralelas, e também entre os comprimentos dos respetivos arcos correspondentes, os alunos continuaram com as construções seguindo os passos 13 a 19. Neste último passo deveriam apresentar um print tal como o exemplificado na figura 18 da página anterior.

Nas alíneas c) e d) os alunos expuseram as suas conjeturas, que os comprimentos das cordas entre duas retas paralelas são iguais e que os comprimentos dos arcos compreendidos entre duas retas paralelas são iguais, induzidos, única e exclusivamente, pela observação das construções. Nos passos seguintes, ou seja, 20 a 22, os alunos deveriam apresentar prints das cinco variações construídas e preencher uma tabela com os dados recolhidos a partir dessas construções. Nas imagens da figura 19 pode-se observar também a curiosidade e a diversidade com que os alunos experimentaram o programa.

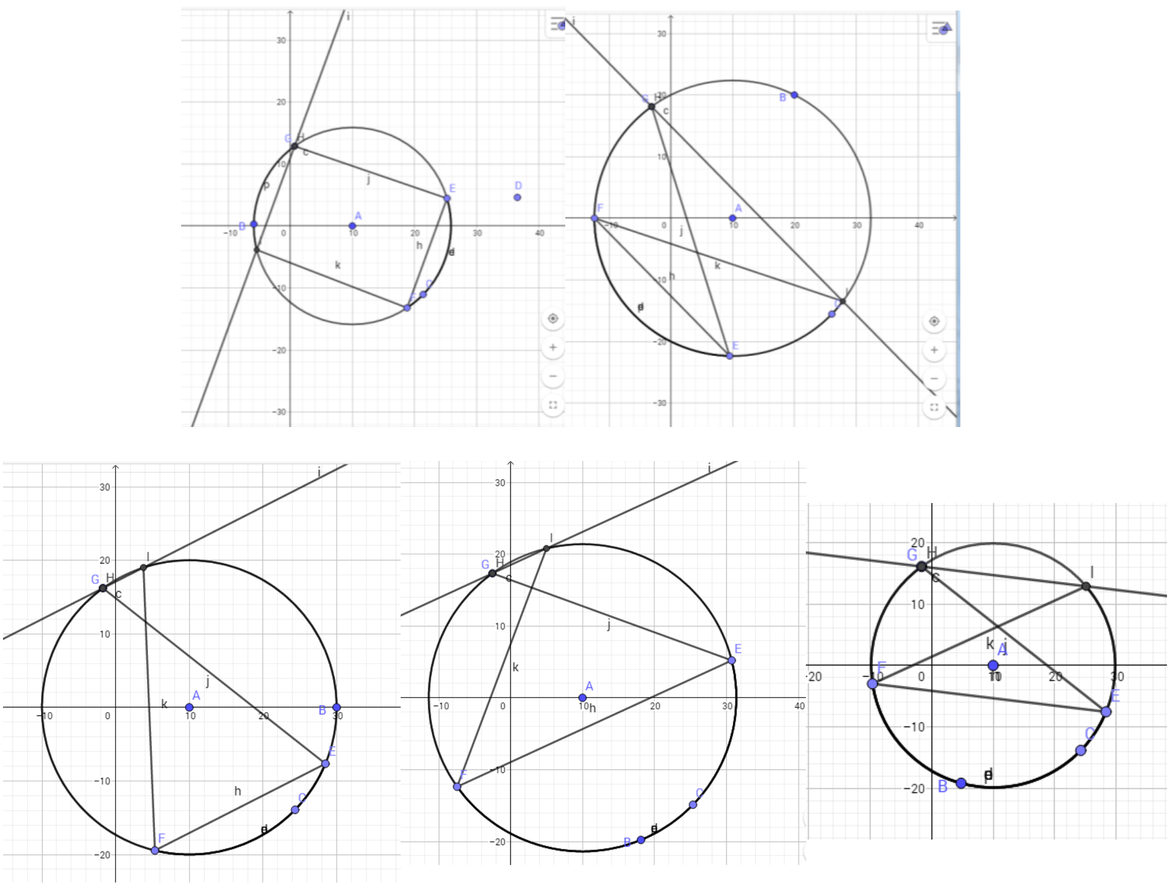


Figura 19 – Variações de Ana e Guilherme (passo 22).

Cada par de alunos fez as suas variações e registou os dados na tabela apresentada como se pode observar na figura 20.

	1	2	3	4	5
Raio da circunferência de centro A que contém B	3.7	4.06	4.68	3.54	3.39
Comprimento da corda [j] compreendida entre as cordas [EF] e [HI]	2,42	5.3	6,11	1.66	1.65
Comprimento da corda [k] compreendida entre as cordas [EF] e [HI]	2,42	5.3	6,11	1,66	1,65
Comprimento do arco menor e compreendido entre as cordas [EF] e [HI]	2,46	5.77	6.65	1,67	1,67
Comprimento do arco menor d compreendido entre as cordas [EF] e [HI]	2, 46	5, 77	6.65	1,67	1,67

Figura 20 – Tabela produzida por Tiago e José (passo 22).

Tal como em situações anteriores os alunos consideraram as suas conjeturas confirmadas pela observação das variações, cinco por cada par. Neste momento tinham passado cerca de quarenta minutos e captei a atenção dos alunos para a discussão das conjeturas. Feitas as generalizações impunha-se procurar as justificações:

Professora: Bem, meninos! Tanto quanto eu percebi todos conjeturaram que os comprimentos das cordas e dos arcos são iguais. Agora temos é de descobrir porquê. Alguém tem algo a dizer neste sentido?

(silêncio)

Professora: Neste percurso que temos vindo a seguir já vimos que é frequente precisarmos de nos lembrar de conteúdos já abordados em situações anteriores...

Mário: Só se for outra vez a igualdade de triângulos...

Maria: Isso não dá, não há triângulos.

Mário: Da outra vez também não havia, nós é que os imaginámos lá com os raios. Nas nossas variações às vezes apareceram triângulos...

Professora: E os triângulos que apareceram são iguais?

Marta: Nas nossas isso também aconteceu, mas não são iguais, não vai dar...

Professora: OK. Não são iguais, mas terão alguma relação? Haverá na construção triângulos iguais?

Pedro: Só se forem semelhantes, parecem...

Professora: E como seria isso?

Mário: Ali onde se cruzam os ângulos são iguais...

Pedro: Pois, onde as cordas se cruzam os ângulos são iguais, são verticalmente opostos...

Sara: Aquelas retas são paralelas... havia qualquer coisa das paralelas num triângulo mas não me lembro.

Rúben: Era o Tales... (risos)

Professora: Calma, meninos... Vamos lá todos a pensar e a tentar recordar o Teorema de Tales!

Marta: Eu acho que me lembrei, porque com retas paralelas estes ângulos aqui, os correspondentes, ou alternos internos, não me lembro o nome... São iguais.

No decurso da discussão os alunos verificaram que os triângulos a que se estavam a referir não são iguais, mas existe uma relação. Mas verifiquei que os alunos não estavam todos envolvidos na discussão. Algumas ideias foram lançadas mas os alunos não estavam a conseguir concretizar. Então tentei estimular um pouco mais o raciocínio dedutivo dos alunos, relembrando o contexto da Geometria do 7.º ano de escolaridade e fazendo um ponto da situação dos progressos até ali alcançados:

Professora: Pois é, os triângulos são semelhantes, é um facto. Aqueles ângulos que a Marta disse são iguais, são ângulos alternos internos entre retas paralelas e portanto são iguais. Mas em que medida é que isso nos ajuda a provar que as cordas são iguais? No 7º ano, quando falámos dos critérios de semelhança de triângulos, falámos também de quadriláteros e das suas propriedades...

Pedro (interrompendo a professora): Não há aqui quadriláteros, ou há só às vezes...

Professora: Pois, quando não há vamos imaginar o quadrilátero em que estas cordas são diagonais, vamos ver... Por favor vamos todos deslocar os pontos de modo a que as cordas, que vocês afirmam ser iguais, se cruzem...

Os alunos foram modificando as suas construções de acordo com a minha sugestão:

Professora: Agora "fechem" o quadrilátero, de modo a essas cordas serem diagonais... E tentem classificar o quadrilátero, dizer o nome, encontrar propriedades...

Alguns pares revelaram dificuldades em seguir as indicações e os pares iam-se entreajudando. Então surgiram várias reações, de uma forma geral os pares identificaram o quadrilátero obtido como sendo um paralelogramo, noutros surgia um retângulo, ou trapézio. Então relembrei que desde que o quadrilátero tenha dois lados paralelos pode ser denominado por trapézio. E vários alunos começaram a tentar provar que aquelas cordas eram iguais. Foi então que um par manifestou ter descoberto o porquê, a André e a Mariana e então dei-lhes a palavra. A aluna, em representação do par, pediu para se deslocar ao quadro para conseguir explicar melhor e fez a seguinte construção, que se apresenta na figura 21.

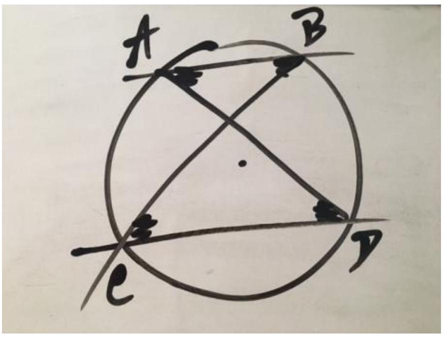


Figura 21 – Imagem construída por André para conseguir expor o seu raciocínio para justificar que cordas entre retas paralelas são congruentes

E o André explicou:

André: Aqui na figura as cordas são [BC] e [AD]. O que nós vimos no *GeoGebra* é que estes ângulos aqui assinalados são sempre iguais, demos muitas voltas e deu sempre e vocês façam aí para ver. Isto acontece porque as retas são paralelas, são alternos internos, o A com o D e o B com o C. Porque são os quatro iguais não sei mas são, tenho a certeza....

Professora: Ok, Mariana, continua....

André: Assim estes triângulos, aqui o E é onde as cordas se cruzam, o [ABE] e o [CDE] são isósceles – enquanto fala complementa a figura como se pode observar na figura 22 – e então o [AE] é igual ao [BE] e o [CE] é igual ao [DE]. Portanto quando juntarmos os dois ficam iguais, estão a ver?

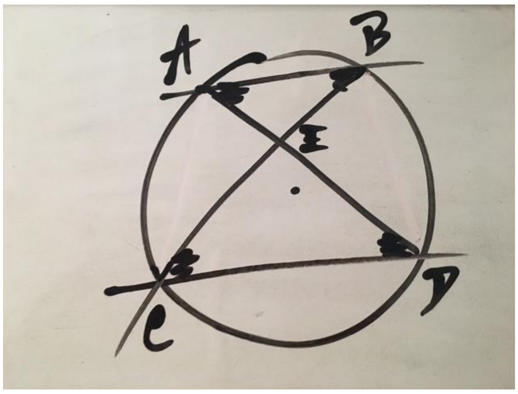


Figura 22 – Complemento da figura 21 com a inserção do ponto E, ponto de interseção das cordas, efetuado no quadro por André

> Professora: Muito bem, Mariana! E que tal pessoal? Dúvidas....
> Pedro: Pois é... experimentei e os nossos ângulos também são todos iguais...
> Rúben: E os nossos também.... faz sentido mas nós não "estávamos a ver", não...

E assim, recorrendo a propriedades geométricas os alunos justificaram que as cordas eram iguais. Não considerei necessário fazer uma demonstração algébrica com todo o rigor da escrita formal, a generalidade da turma entendeu, embora apenas este par tenha conseguido explicar o porquê recorrendo a propriedades anteriormente estudadas. Registaram-se dois pares aos quais tive de reformular a explicação da colega. Para tal optei por fazê-lo no lugar onde se encontravam enquanto a restante turma prosseguia com a tarefa.

Finda esta discussão terminou o bloco de dois tempos letivos. A aula seguinte coincidiu com o dia seguinte e a aula anterior estava bem presente. Incitei os alunos a serem céleres, pois teríamos apenas um tempo de quarenta e cinco minutos para terminar esta tarefa.

Iniciados os trabalhos desta sessão, os alunos construíram uma nova circunferência, uma corda cujos extremos poderiam ser quaisquer pontos da circunferência e uma reta perpendicular a essa corda contendo o centro da circunferência, seguindo os passos 23 a 29, finalizando com um print como o que se pode observar na figura que se segue (figura 23).

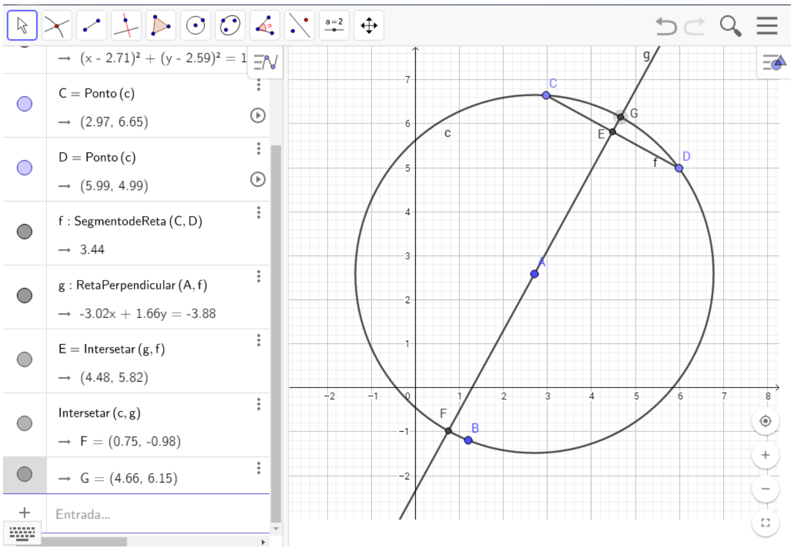


Figura 23 – Construção de Marcelo e Maria (passo 29)

Nas alíneas g), h) e i) os alunos eram incitados a observar atentamente os segmentos de reta em que a reta, perpendicular à corda e que passa no centro da circunferência, dividia a corda, os arcos subtensos menores e os ângulos ao centro definidos pelos extremos da corda e pelo ponto de interseção da reta com a corda. Mais uma vez, de forma análoga a situações anteriores, os alunos foram unânimes em afirmar a igualdade entre os segmentos de reta, entre os arcos e entre os ângulos ao centro. Apressaram-se então a seguir os passos de construção e medição 30 a 32 e a registar os dados das várias simulações na tabela que se encontra na última página da tarefa.

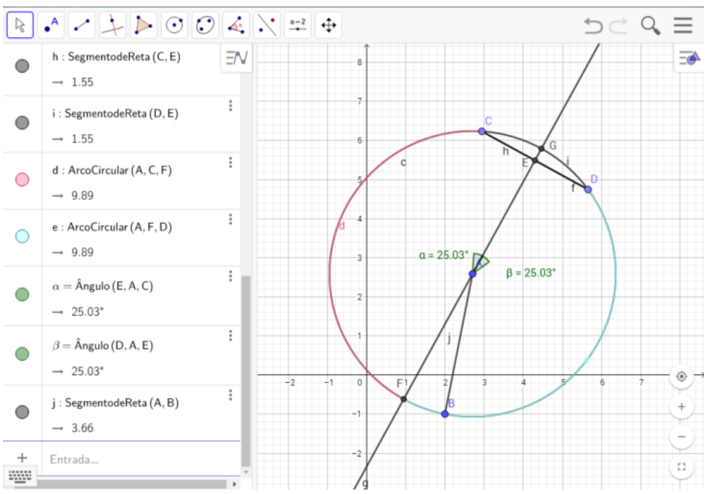


Figura 24 – Construção de Gabriel e Bianca (passo 32).

Raio da circunferência de centro A que contém B	1,49	2,05	1,91	2,27	2,3
Comprimento [CE]	1,08	1,84	0,44	2,26	2,24
Comprimento [DE]	1,08	1,84	0,44	2,26	2,24
Comprimento do arco menor CF	1,21	2,29	0,45	3,34	3,1
Comprimento do arco menor DF	1,21	2,29	0,45	3,34	3,1
Amplitude do ângulo ao centro CAE	46,29°	64,16°	13,45°	84,22°	77,32°
Amplitude do ângulo ao centro DAE	46,29°	64,16°	13,45°	84,22°	77,32°

Figura 25 – Tabela preenchida por Gabriel e Bianca.

Acima podem observar-se a construção de Gabriel e Bianca, denotando mais uma vez algum cuidado com a decoração da construção para facilitar a observação (figura 24) e uma tabela preenchida com os dados de várias simulações do mesmo par de alunos (figura 25). Na alínea j) os alunos, mais uma vez, de uma forma empírica concluíram que numa circunferência, se uma reta é perpendicular a uma corda e passa pelo centro então divide-a em duas partes iguais, assim como aos arcos subtensos e aos ângulos ao centro correspondentes.

Enquanto os alunos iam construindo as suas figuras e movimentando os pontos estratégicos da forma sugerida, fui circulando por entre os grupos de trabalho e constatando a crescente desenvoltura com que a maioria lidava com o *GeoGebra*. Denotava-se já um grande conhecimento da forma como as construções mais frequentes se efetuam, muitas vezes já sem a necessidade de seguir as indicações existentes na folha. Este facto tornou o desempenho significativamente mais rápido do que nas tarefas anteriores.

Ainda assim verifiquei que alguns alunos eram mais rápidos que outros. Os mais rápidos apressaram-se a iniciar os exercícios de consolidação sugeridos enquanto se aguardava pelo momento da discussão coletiva. Esta teve início quando faltavam dez minutos para o final da aula:

Professora: Meninos, hoje o tempo está a correr contra nós! Vamos lá, já sabem o que se pretende, temos de entender o porquê destas igualdades!

Marcelo: Já pensei nisso e já sei... agora é outra vez a igualdade de triângulos.

André: Mas quais triângulos, nós não temos nenhum!

Professora: Tenham calma! Marcelo, expõe a tua ideia por favor.

Marcelo: "Puxamos" os extremos da corda ao centro, e temos dois raios. E estes triângulos ao lado da reta ficam iguais.

Marta: Nós já fizemos e medimos os ângulos, são iguais, pois são.

Professora: Sim, Marta. Mas medir os ângulos dos vossos triângulos e eles terem os ângulos iguais não significa que todos construídos assim sejam iguais, temos de justificar.

Rúben: Posso ler o que escrevi com a Sara?

Professora: Sim, Rúben. Faz o favor.

Rúben: "Os triângulos são iguais porque o triângulo grande é isósceles, tem dois ângulos iguais, ou seja os ângulos ACD e ADC têm a mesma amplitude e no ponto E os ângulos são retos.

Professora: Concordo, mas acho que falta aí qualquer coisa... que critério é esse? E porque que é que o triângulo é isósceles?

André: Acho que percebi. Como tem esses dois ângulos iguais o outro, o ao centro também tem de ser por causa do 180^0. E depois como o lado EA pertence aos dois triângulos e têm os dois um raio de lado, dá para usar o LAL.

Observa-se um certo silêncio. Reparei que alguns não compreenderam a justificação apresentada. Então, apesar de entretanto ter soado o toque da campainha os alunos permaneceram na sala e voltei a expor a justificação apresentada por André e todos anuíram com a cabeça em sinal que agora já entenderam e registaram a nova propriedade no resumo teórico, que aos poucos se vai preenchendo.

Análise. Esta tarefa assentava em três construções, pretendendo-se que os alunos conjeturassem três propriedades distintas. À semelhança das duas tarefas anteriores, partindo das construções iniciais, os alunos foram convidados a fazer generalizações e chamados a manipular os elementos-chave de cada construção para obter evidências de que as suas generalizações se verificam. Observando os dados recolhidos e as construções efetuadas, todos os alunos elaboraram conjeturas sobre as propriedades visadas, ou seja, que uma reta tangente a uma circunferência forma com o raio que contém o ponto de tangência um ângulo reto, que numa circunferência as cordas e os arcos compreendidos entre duas retas paralelas são iguais e que, numa circunferência, se uma reta é perpendicular a uma corda e passa pelo centro, então divide-a em duas partes iguais, assim como aos arcos subtensos e aos ângulos ao centro correspondentes. Os alunos usaram mais uma vez raciocínio indutivo, a partir do observado, para generalizar.

No caso da primeira propriedade não houve qualquer dificuldade em formular a respetiva justificação. Para justificar a segunda generalização, os alunos sugeriram primeiro usar a igualdade de triângulos mas esta estratégia rapidamente se revelou inconclusiva. Em seguida, surgiu a semelhança de triângulos como base para uma possível justificação. Pareceu-me, no entanto que a maioria dos alunos não estava a ver como usar esse conceito e os alunos que referiram essa possibilidade também não conseguiram concretizá-la. Com o intuito de manter toda a turma focada, apontei, ainda que de forma subtil, um caminho que me pareceu percetível e que usava conhecimentos adquiridos em anos letivos anteriores – a classificação de quadriláteros e triângulos e as suas propriedades. Deste modo, os alunos chegaram à almejada justificação. Também para justificar a terceira generalização, os alunos recorreram a propriedades já abordadas nas tarefas anteriores, neste caso, os critérios de igualdade de triângulos.

Nas fases de construção das figuras não se verificaram quaisquer dificuldades. Até pelo contrário, os alunos foram revelando melhorias significativas no manuseamento do programa *GeoGebra*. No entanto, em contexto de discussão coletiva, os alunos revelaram dificuldades em justificar as suas generalizações. Na justificação da segunda propriedade a turma vagueou um pouco, tendo surgido diversas hipóteses, mas longínquas, pouco presentes. No meu entender, naquele momento pareceu-me adequado observar um quadrilátero produzido por um grupo de alunos, solicitando aos alunos a análise das caraterísticas dos ângulos que entretanto surgiram. Esta sugestão foi entendida pela quase totalidade da turma e permitiu que todos os alunos se voltassem a concentrar na justificação e recuperar a confiança na consecução do objetivo. No caso da justificação da terceira propriedade, os alunos sugeriram o uso da igualdade de triângulos, ideia ainda pouco imediata para alguns pares de alunos apesar de já se ter recorrido aos critérios de igualdade de triângulos numa situação recente. Nesta fase verificou-se ainda alguma resistência de alguns alunos ao uso de generalizações já conhecidas para justificar novas generalizações. Alguns alunos ainda se concentraram em exemplos concretos, assumindo que esses exemplos poderiam servir de justificação.

5.4. Tarefa 4 – Circunferência – ângulo inscrito

Na aula seguinte, depois da correção dos exercícios de consolidação da tarefa anterior, os alunos apressaram-se a pegar nos seus computadores portáteis e a preparar-se para mais uma tarefa com o programa *GeoGebra* enquanto um colega distribuiu as tarefas aos colegas. Informei os alunos que havia conceitos novos a definir, nomeadamente os de ângulo inscrito, arco capaz do ângulo inscrito e arco compreendido entre os lados do ângulo inscrito. Interiorizadas as definições, os pares de alunos iniciaram a resolução da tarefa seguindo os passos 1 a 4 para a construção da circunferência, apresentando neste passo um print do passo anterior. Reparei que cinco pares abriram o ficheiro de uma tarefa anterior e removeram da imagem os elementos não relevantes para a tarefa atual ao invés de criar um novo ficheiro, o que revela, em meu entender, segurança a trabalhar com o programa em causa. De uma forma ou de outra os alunos prosseguiram para os passos 5 a 8 para a construção de um ângulo inscrito e, de seguida, para os passos 9 a 11 para a construção do ângulo ao centro que corresponde ao arco compreendido entre os lados do ângulo inscrito. Obtiveram assim uma imagem análoga à registada na figura 26.

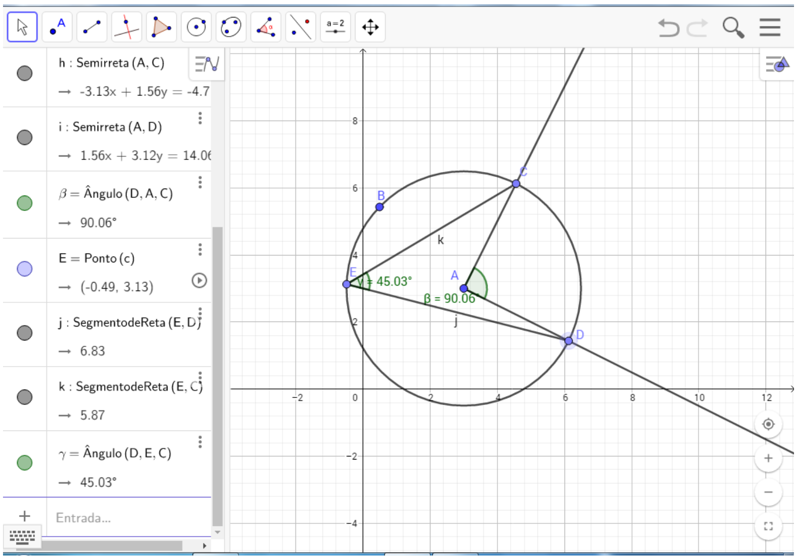
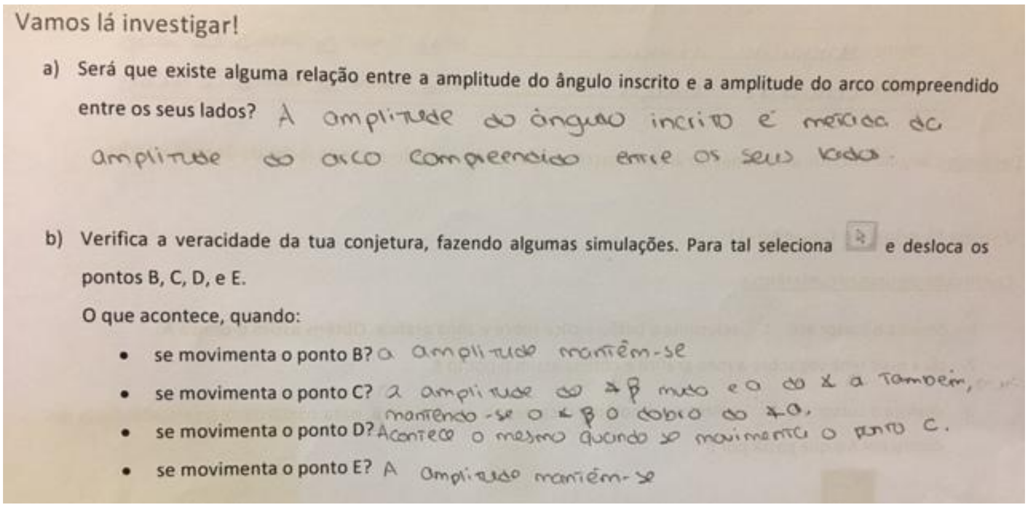


Figura 26 - construção do ângulo ao centro que corresponde ao arco compreendido entre os lados do ângulo inscrito de Marta e Bernardo (passo 11)

Na alínea a) os alunos foram unânimes em conjeturar que a amplitude do arco compreendido ente os lados do ângulo inscrito é o dobro da amplitude do ângulo inscrito ou vice-versa, isto é, a amplitude do ângulo inscrito é metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados. Apesar de apenas na alínea b) ser pedido para moverem os pontos envolvidos na construção, reparei que alguns pares de alunos o fizeram antes de conjeturarem. Constataram assim que: quando movimentam o ponto B, alterando o raio, a amplitude dos ângulos mantém-se; quando movimentam o ponto C sobre a circunferência a amplitude do ângulo ao centro altera-se mas a relação com a amplitude do ângulo inscrito mantém-se; quando movimentam o ponto D acontece o mesmo que no caso anterior; e quando movimentam o ponto E, deslocando-o sobre o arco capaz, a amplitude do ângulo inscrito mantém-se. Observe-se, a título de exemplo, a figura 27.



Vamos lá investigar!

a) Será que existe alguma relação entre a amplitude do ângulo inscrito e a amplitude do arco compreendido entre os seus lados? A amplitude do ângulo inscrito é metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados.

b) Verifica a veracidade da tua conjetura, fazendo algumas simulações. Para tal seleciona e desloca os pontos B, C, D, e E.

O que acontece, quando:

- se movimenta o ponto B? a amplitude mantém-se
- se movimenta o ponto C? a amplitude do ∡β muda e o do ∡α também, mantendo-se o ∡β o dobro do ∡α.
- se movimenta o ponto D? Acontece o mesmo quando se movimenta o ponto C.
- se movimenta o ponto E? A amplitude mantém-se

Figura 27 – constatações de Micaela e Nuno nas alíneas a) e b)

À semelhança de situações análogas em tarefas anteriores, os alunos consideraram que a conjetura se confirma e generalizaram com base na quantidade de exemplos em que constata a mesma ocorrência, escrevendo na alínea c) a propriedade conjeturada.

Apesar do último ponto da alínea b) já permitir comparar ângulos inscritos correspondentes ao mesmo arco, considerei pertinente que os alunos observassem em simultâneo dois ângulos distintos nessas condições e, para tal, sugeri-lhes essa construção com os passos 12 a 14. Surgiram assim construções semelhantes à da figura 28.

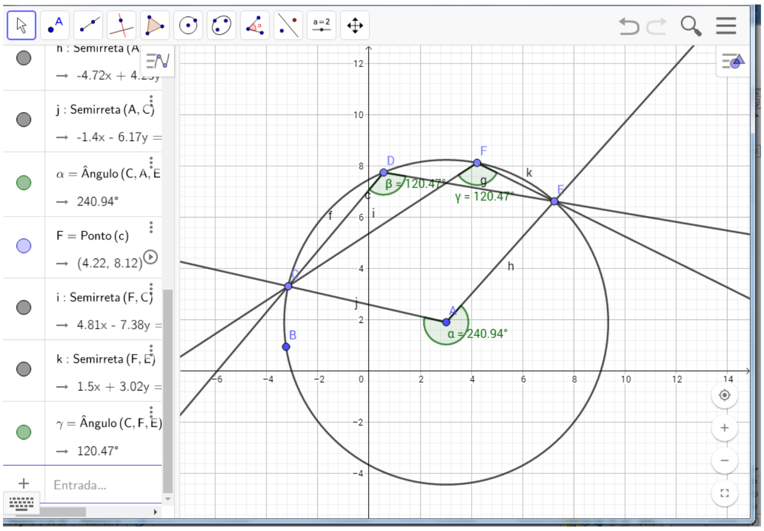


Figura 28 – construção de dois ângulos inscritos correspondentes ao mesmo arco de Rita e João

Reparei que os alunos, automaticamente, sem qualquer sugestão na tarefa, movimentavam pontos cruciais da figura, afirmando em seguida que os ângulos inscritos correspondentes ao mesmo arco têm a mesma amplitude, respondendo assim às alíneas d) e e).

De seguida, os alunos foram convidados a explorar um caso particular, aquele em que o arco corresponde a um ângulo raso. Quando na alínea f) se lhes pede a amplitude do ângulo inscrito numa semicircunferência, ou seja, no arco correspondente ao ângulo raso, a resposta 90^0 foi unânime, pois trata-se apenas de um caso particular da situação analisada nas alíneas anteriores. O desafio foi a construção do ângulo raso, não por movimentação com o cursor dos pontos C ou E sobre a circunferência, até porque nem sempre é fácil com as primeiras tentativas obter um ângulo raso. Surgiram assim várias ideias: a reflexão central do ponto C com centro em A para encontrar C´, o ponto diametralmente oposto e depois fazer o ponto E coincidir com o ponto C´, escrevendo essa indicação na "entrada" da folha algébrica; definir o vetor $\overrightarrow{AC}$ e depois escrever na "entrada" $E = C - \overrightarrow{AC}$; traçar o raio [AC], depois uma perpendicular a este raio que contenha o ponto A, determinar o ponto simétrico de C em relação à perpendicular (C`) e depois na "entrada" fazer E coincidir com C`. Todas estas propostas válidas surgiram depois de algumas tentativas não conseguidas. Como exemplo temos o caso da translação, a primeira tentativa foi $E = C + \overrightarrow{AC}$, mas o ponto pretendido ficava fora da circunferência e assim se constatava que era essencial inverter o sentido do vetor da translação. Esta atividade, apesar de não se prender diretamente com uma generalização e a sua justificação, permitiu que os alunos adquirissem relevantes competências de exploração do programa e de o usar para atingir os seus objetivos.

A cerca de quinze minutos do final da aula todos os alunos tinham concluído a tarefa e iniciou-se a discussão, agora com o objetivo de justificar as propriedades generalizadas:

Professora: Vamos lá então pensar um bocadinho e tentar justificar porque motivo o ângulo inscrito tem metade da amplitude do ângulo ao centro compreendido entre os seus lados. Alguma ideia?

(silêncio)

Sara: Já sabia que a professora ia perguntar isso e pensámos, mas não deu nada...

Professora: Comecemos então, para variar, pelo fim. Porque será que ângulos inscritos no mesmo arco têm a mesma amplitude?

(vários dedos no ar)

Professora: Sim, Rúben, podes falar.

Rúben: Isso eu acho que tem a ver com aquela da outra aula, está aqui na folha, a ângulos iguais correspondem arcos iguais e ao contrário.

Professora: Explica melhor.

Rúben: Se o arco é o mesmo o ângulo ao centro é o mesmo, logo tinha de ser assim, o ângulo inscrito, um qualquer, também tinha de medir o mesmo.

Vários: Essa é fácil!

Professora: OK. Se não há dúvidas.... Se todos medem o mesmo e, parece-me a mim, que todos entenderam, vamos deslocar o vértice do ângulo inscrito até o seu lado "apanhar" um lado do ângulo ao centro, assim a sobreporem-se, estão a ver? Aproveitem as linhas da grelha para alinhar...

Durante o decorrer da aula observei que os alunos facilmente tinham conjeturado que a amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do ângulo ao centro correspondente ao mesmo arco, induzidos pelas imagens obtidas. Alguns tinham-me até perguntado o porquê de ser metade/dobro e eu fui dizendo para manobrarem a figura, alguma ideia poderia surgir, mas nenhum par se tinha debruçado bem sobre a tentativa de justificar, apesar de saberem que mais tarde teriam de pensar verdadeiramente no motivo. Assim, fiz no meu computador da sala a minha própria construção e sugeri-lhes que me acompanhassem a partir da projeção no quadro, como se observa na figura 29.

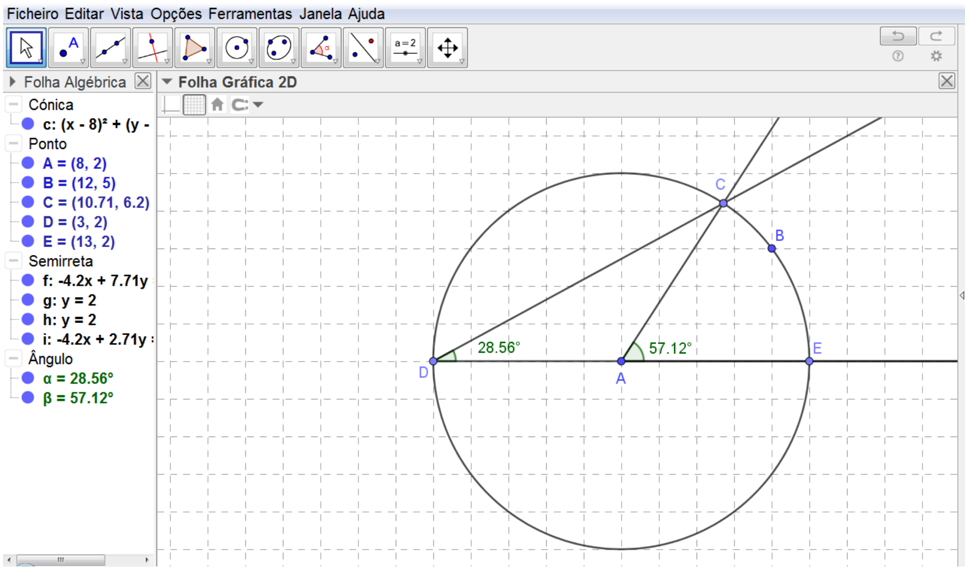


Figura 29 – Imagem projetada no quadro a partir do computador da professora

E a discussão prosseguiu:

Professora: E agora? Se são todos iguais, procuremos provar com este assim. (Silêncio)

João: Há-de ser com triângulos outra vez...

Professora: Ah, sim? Então vamos lá...

João: Ainda não vi como, mas assim há aí triângulos e temos usado nas outras tarefas....

Rita: Acho que já sei, posso dizer? (passado algum tempo)

Professora: Vamos lá.

Rita: Aquele triângulo ali é isósceles, o que tem o ângulo inscrito...

Pedro: Já vi! O outro ângulo também mede 28,560, ou o que for, é igual ao outro....

Professora: E porque que é que é isósceles?

Marta: Tem 2 lados iguais, são raios, já vi tudo.... e ...

Professora (dirigindo-se à turma): Calma! Meninos, estão a acompanhar o raciocínio dos colegas?

Tomás: Não sei se estou a ver... isso prova o quê?

Professora: Sabendo dois ângulos de um triângulo conseguimos determinar o outro?

Tomás: Sim, é fazer 180^0 menos os outros...

Professora: Muito bem, faça cada um com o seu par com os dados da vossa figura...

Tomás: Já vi, então agora o de fora, fica o ao centro e fazemos outra vez 180^0 menos...

Professora: E então?

Sara: Pois, fazemos duas vezes o 180^0 menos, por isso é que vamos dar ao mesmo e dá o dobro porque é a soma dos dois iguais... que fixe!

Professora: É mesmo isso. Já tocou, meninos. Muito obrigada! Se tiverem outra ideia já sabem, digam. Tem é de ser na próxima aula. Façam os exercícios de consolidação, ok?

E a aula terminou. Já tinha tocado mas ficámos ali até terminar a justificação e esta ficar clara. Dois pares de alunos ainda ficaram, mesmo depois de arrumados os computadores portáteis, e reformulei individualmente a explicação a partir do quadro, fazendo algumas movimentações, mostrando-lhes o raciocínio exposto pelos colegas.

Os alunos compreenderam que o triângulo [DAC] na figura 29, construído daquela forma, é sempre isósceles porque dois dos seus lados são raios da circunferência. Como a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180^0, para obter a amplitude do ângulo DAC faz-se a diferença entre 180^0 e o dobro da amplitude do ângulo inscrito. Para determinar a amplitude do ângulo ao centro correspondente ao mesmo arco do ângulo inscrito volta a fazer-se a diferença entre 180^0 e o valor obtido e, portanto, "volta ao mesmo", isto é ao dobro da amplitude do ângulo inscrito.

Análise. Esta tarefa assentava em três construções, pretendendo-se que os alunos conjeturassem três propriedades distintas mas intimamente relacionadas. Partindo das construções iniciais, os alunos foram fazendo generalizações e movimentando os elementos-chave de cada construção, conseguindo todos obter casos concretos que confirmavam as suas conjeturas. Generalizaram que a amplitude do ângulo inscrito é metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados (que coincide com a amplitude do ângulo ao centro que lhe corresponde, por definição), que ângulos inscritos no mesmo arco têm a mesma amplitude e que, no caso particular, quando o ângulo ao centro é raso, o ângulo inscrito é reto, fazendo com que um triângulo inscrito numa semicircunferência seja um triângulo retângulo. Os alunos, mais uma vez, usaram raciocínio indutivo, a partir do observado, para generalizar.

No caso da primeira propriedade, constatei que os alunos não conseguiam encontrar um ponto de partida para formular a respetiva justificação. No entanto, para a segunda propriedade, a justificação foi célere recorrendo a uma propriedade justificada na tarefa 2, a ângulos ao centro congruentes correspondem arcos e cordas congruentes, e vice-versa. Assim sendo, sugeri que usassem esse facto para justificar a primeira propriedade, reconhecendo que todos os ângulos inscritos que correspondem ao mesmo arco têm de ter a mesma amplitude. Ou seja, sugeri que usássemos um caso particular para deduzir a amplitude do ângulo ao centro. Assim os alunos conseguiram visualizar triângulos e, de imediato, começaram a procurar propriedades destes para poder aplicar à situação. Com a constatação de que, nas condições dadas, teríamos sempre um triângulo isósceles, reconhecendo que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é a amplitude de um ângulo raso e que o ângulo ao centro é suplementar com o ângulo do triângulo que não é inscrito, os alunos justificaram a primeira generalização. A justificação da terceira generalização foi imediata pois os alunos encararam-na como um caso particular da primeira, estando automaticamente justificada pela justificação desta.

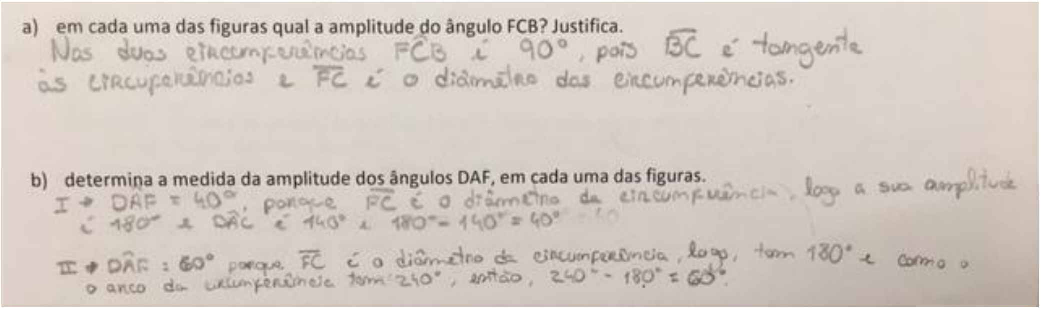
Nas fases de construção das figuras não se verificaram dificuldades, com exceção da situação em que solicitei aos alunos que construíssem um ângulo raso por transformações geométricas e não por movimentação simples de pontos sobre a circunferência. No entanto, a maioria dos alunos superou o desafio, mostrando um desenvolvimento significativo da sua competência na utilização do programa *GeoGebra*. Mais uma vez, foi em contexto de discussão coletiva que os alunos revelaram dificuldades em justificar as suas generalizações. Só depois da minha proposta de analisar o caso particular em que os lados do ângulo inscrito e do ângulo ao centro se sobrepõem, os alunos conseguiram avançar. Assim, a justificação foi conseguida por simplificação, mas com o conhecimento de que, neste caso particular, a simplificação não retiraria a qualidade global à propriedade, conciliada com a segunda propriedade já justificada.

5.5. Tarefa 5 – Circunferência – ângulo de segmento, ângulo ex-inscrito

A aula dedicada a esta tarefa era constituída por dois tempos de 45 minutos. Iniciou-se com a ida de alguns alunos ao quadro para resolução dos exercícios de consolidação da tarefa anterior e esclarecimento de algumas dúvidas. No momento seguinte apresentei aos alunos as definições de segmento de círculo (maior e menor), de ângulo de segmento e de ângulo ex-inscrito sobre as quais a tarefa iria incidir. De seguida, distribui o enunciado da tarefa, desta vez sem os computadores portáteis. Estes estavam presentes na sala e seriam usados caso houvesse necessidade, nas alíneas 1.f) e 2.f), mas o objetivo da tarefa era que os alunos conseguissem conjeturar apenas com as imagens dadas no enunciado em papel e que conseguissem formalizar as generalizações (alíneas 1.d) e 2.d)) e justificá-las (alíneas 1.e) e 2.e)).

Do enunciado da questão 1 constam as figuras I e II, cada uma delas com uma circunferência de centro A, uma reta tangente à circunferência num ponto C, o diâmetro [CF], um ponto B que pertence à reta tangente mas não pertence à circunferência, um ponto D pertencente à circunferência (distinto de C e de F), ficando assim definidos os ângulos α e β, respetivamente ângulo ao centro DAC e ângulo de segmento DCB. Saliente-se a particularidade de na figura I o arco DC, correspondente ao ângulo ao centro α, ter uma amplitude inferior a 180^0, concretamente 140^0, e de na figura II o arco maior DFC, correspondente ao ângulo ao centro α, ter agora uma amplitude superior à de um ângulo raso, concretamente 240^0.

Na alínea a) da questão 1 os alunos foram unânimes em responder que a amplitude do ângulo FCB é 90^0, uma vez que a reta BC é tangente à circunferência e [CF] é um diâmetro, usando uma linguagem formal pouco rigorosa na maioria dos casos, mas entendendo-se o sentido das observações. Na alínea b), para determinar a amplitude do ângulo DAF os alunos fizeram a diferença entre a amplitude do ângulo raso e a amplitude do arco DC na figura I e a diferença entre a amplitude do arco DFC e a amplitude do ângulo raso na figura II, justificando com o facto da amplitude do ângulo ao centro ser igual à amplitude do arco correspondente. Verifiquei que sem pensar muito no assunto os alunos subtraíram ao maior o menor, como se pode observar nas duas figuras que se seguem, figuras 30 e 31.


a) em cada uma das figuras qual a amplitude do ângulo FCB? Justifica.
Nas duas circunferências FĈB é 90°, pois BC é tangente às circunferências e FC é o diâmetro das circunferências.

b) determina a medida da amplitude dos ângulos DAF, em cada uma das figuras.
I → DÂF = 40°, porque FC é o diâmetro da circunferência, logo a sua amplitude é 180° e DÂC é 140° e 180° − 140° = 40°
II → DÂF = 60° porque FC é o diâmetro da circunferência, logo, tem 180° e como o o arco da circunferência tem 240°, então, 240° − 180° = 60°.

Figura 30 – Resolução das alíneas 1.a) e 1.b) de Gabriel e Bianca

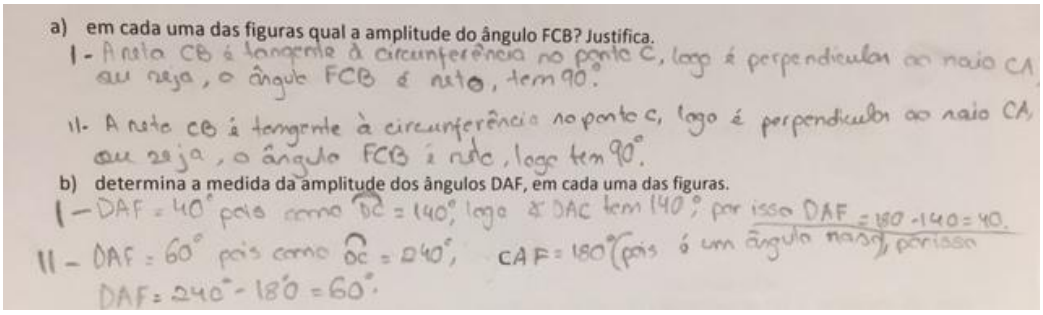

a) em cada uma das figuras qual a amplitude do ângulo FCB? Justifica.
I - A reta CB é tangente à circunferência no ponto C, logo é perpendicular ao raio CA ou seja, o ângulo FCB é reto, tem 90°.
II - A reta CB é tangente à circunferência no ponto C, logo é perpendicular ao raio CA, ou seja, o ângulo FCB é reto, logo tem 90°.
b) determina a medida da amplitude dos ângulos DAF, em cada uma das figuras.
I − DAF = 40° pois como DC = 140°, logo ∢ DAC tem 140°, por isso DAF = 180 − 140 = 40.
II − DAF = 60° pois como DC = 240°, CAF = 180° (pois é um ângulo raso), por isso DAF = 240° − 180° = 60°.

Figura 31 – Resolução das alíneas 1.a) e 1.b) de Tomás e Madalena

Na alínea c) também, com facilidade, a turma determinou a amplitude do ângulo inscrito DCF, uns recorrendo à propriedade justificada na tarefa anterior (a amplitude do ângulo inscrito é metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados) outros recorrendo ao triângulo DCA, isósceles, no fundo à forma como justificaram a propriedade referida. As figuras 32 e 33 que se seguem são exemplo disso.

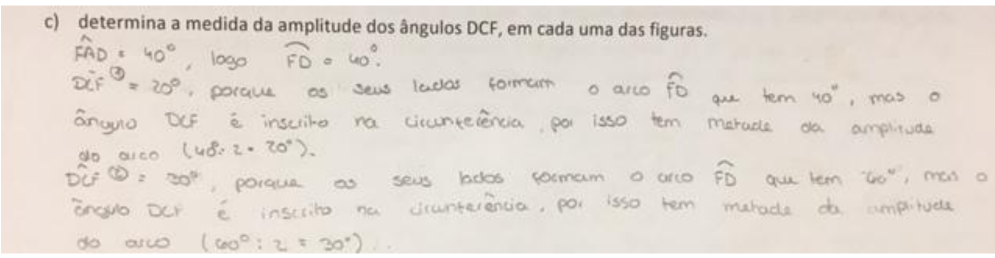
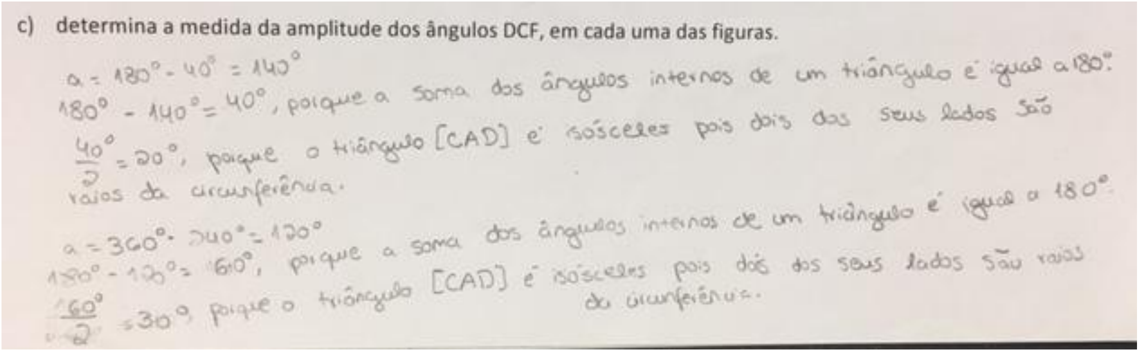

c) determina a medida da amplitude dos ângulos DCF, em cada uma das figuras.
FÂD = 40°, logo FD = 40°.
DĈF ① = 20°, porque os seus lados formam o arco FD que tem 40°, mas o ângulo DCF é inscrito na circunferência, por isso tem metade da amplitude do arco (40° : 2 = 20°).
DĈF ② = 30°, porque os seus lados formam o arco FD que tem 60°, mas o ângulo DCF é inscrito na circunferência, por isso tem metade da amplitude do arco (60° : 2 = 30°).

Figura 32 – Resolução de Mário e Luísa da alínea 1.c)


c) determina a medida da amplitude dos ângulos DCF, em cada uma das figuras.

$\alpha = 180° - 40° = 140°$

$180° - 140° = 40°$, porque a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°.

$\frac{40°}{2} = 20°$, porque o triângulo [CAD] é isósceles pois dois dos seus lados são raios da circunferência.

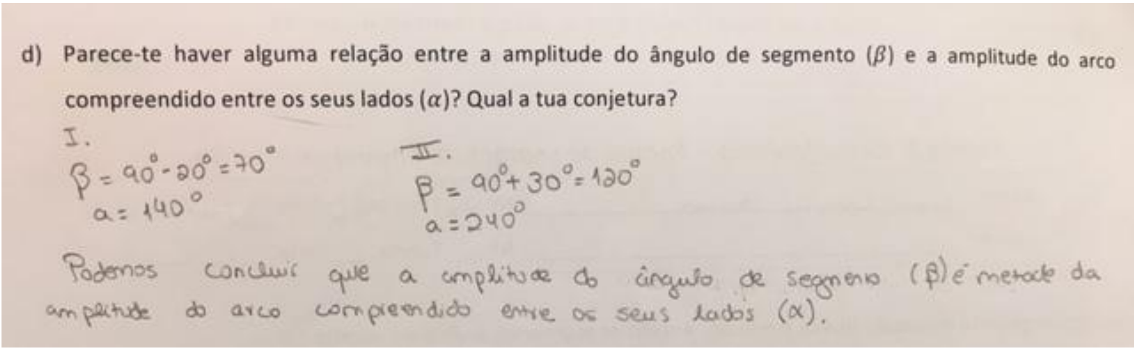
$\alpha = 360° - 240° = 120°$

$180° - 120° = 60°$, porque a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°.

$\frac{60°}{2} = 30°$, porque o triângulo [CAD] é isósceles pois dois dos seus lados são raios da circunferência.

Figura 33 – Resolução de Sara e Rúben da alínea 1.c)

A alínea 1.d) solicita aos alunos uma conjetura para a relação entre a amplitude do ângulo de segmento (β) e a amplitude do arco compreendido entre os seus lados (α). Tendo determinado a amplitude do ângulo inscrito na alínea anterior os alunos foram consentâneos a subtrair essa amplitude a 90^0 na figura I e a somar na situação da figura II. Constataram também que a amplitude do ângulo de segmento coincide em ambos os casos com a metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados (Ver a figura 34).


d) Parece-te haver alguma relação entre a amplitude do ângulo de segmento (β) e a amplitude do arco compreendido entre os seus lados (α)? Qual a tua conjetura?

I.
$\beta = 90° - 20° = 70°$
$\alpha = 140°$

II.
$\beta = 90° + 30° = 120°$
$\alpha = 240°$

Podemos concluir que a amplitude do ângulo de segmento (β) é metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados (α).

Figura 34 – Resolução de Marta e Bernardo da alínea 1.d)

Na alínea 1.e) os alunos deveriam demonstrar a sua conjetura algebricamente, usando as letras da figura e justificando. Surgiram muitas dificuldades, entre muita borracha e muito lápis gastos, os alunos iam tentando privar-se de demonstrar fazendo intervenções do tipo “nós sabemos que é assim, temos a certeza, temos mesmo de usar letras para justificar?”, “se já percebemos, professora, para quê este trabalho todo?”, evidenciando as suas dificuldades e até fazendo algumas “batotas” como se observa na figura 35 ou ficando pelo cálculo numérico para a figura I e tentando passar para o cálculo mais algébrico no que se refere à figura II como se constata na figura 36.

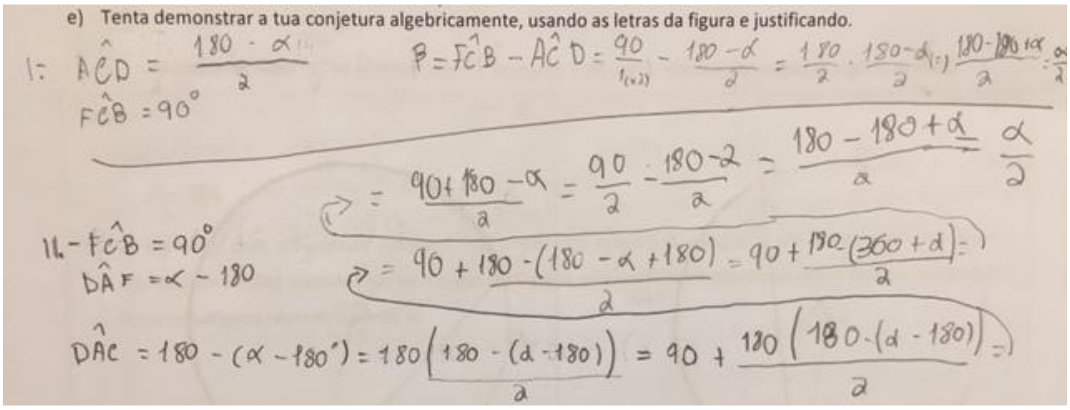


Figura 35 - Resolução de Nuno e Micaela da alínea 1.e)

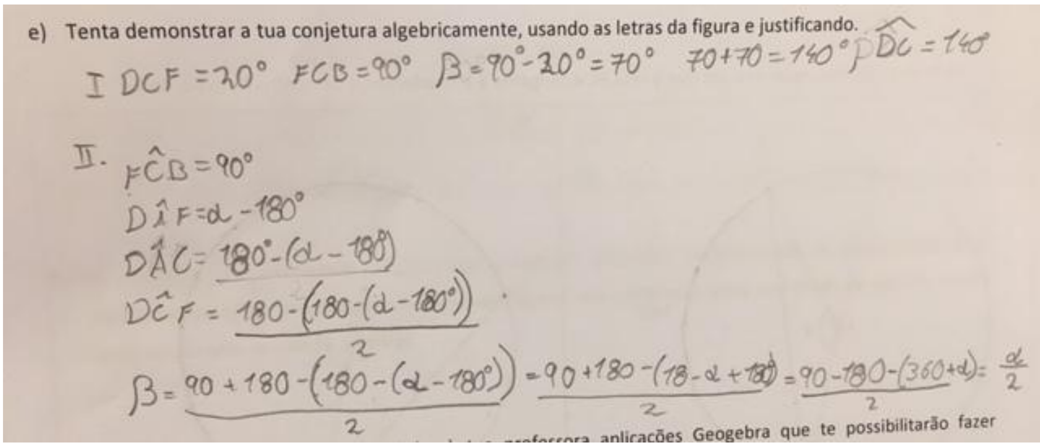


Figura 36 - Resolução de Rita e João da alínea 1.e)

Corrigidos os erros de cálculo algébrico bem como de linguagem formal, todos os pares de alunos conseguiram justificar a sua generalização. Mas o sucesso só foi atingido com a minha ajuda e entre pares, com exceção de quatro pares que conseguiram obter a demonstração de forma autónoma. Um exemplo dessa autonomia observe-se a demonstração efetuada na figura 37, que consta na página seguinte.

Do enunciado da questão 2 constam duas figuras III e IV, em que se observa em cada uma delas uma circunferência de centro A, duas cordas [CD] e [DE] com um vértice em comum (D) e um ponto B que pertence à reta CD mas não pertence à corda [CD], ficando assim definidos o ângulo ex-inscrito EDB também designado por α , o arco β correspondente à corda [CD] e o arco γ correspondente à corda [DE]. Saliente-se a particularidade de na figura III o arco DE, designado por γ , correspondente à corda [DE], ter uma amplitude inferior a 180^0, concretamente 113^0, e de na figura IV o referido arco ter uma amplitude superior à de um ângulo raso, concretamente 202^0.

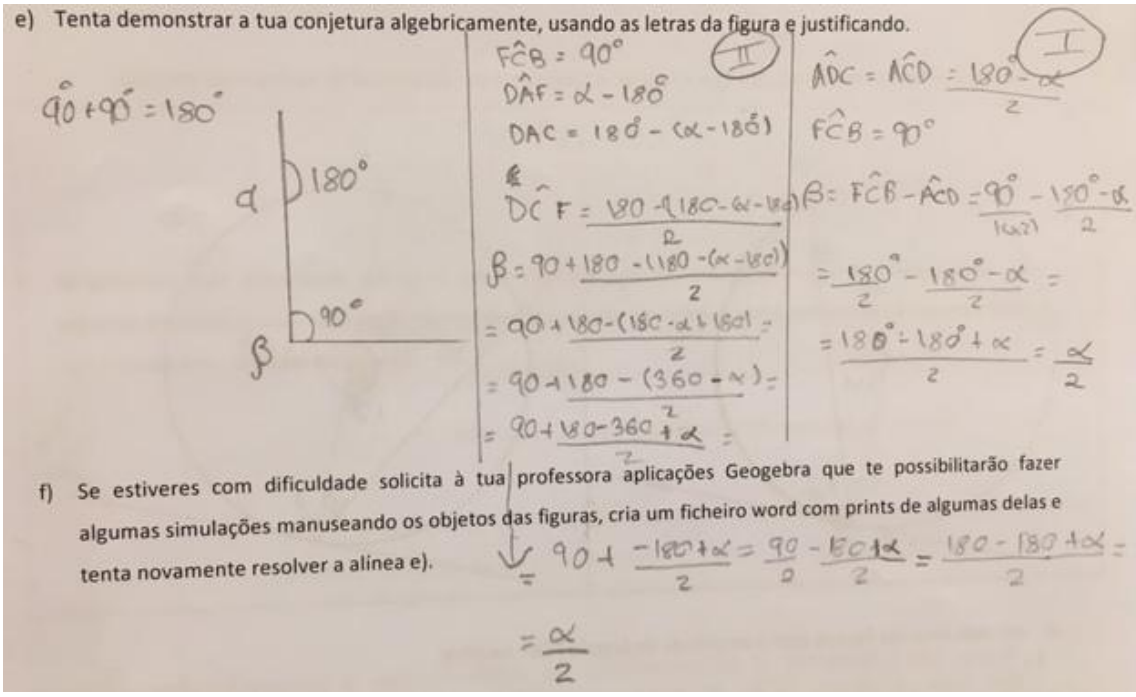
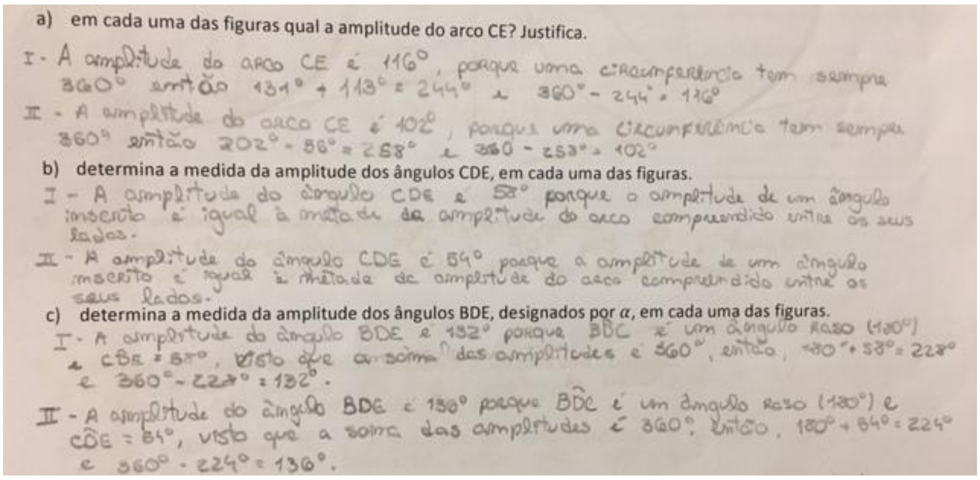


Figura 37 - Resolução de Tomás e Madalena da alínea 1.e)

Na alínea a) da questão 2, todos os alunos obtiveram corretamente a amplitude do arco CE, somando os dois arcos conhecidos e subtraindo a sua soma a 360^0, uma vez que os três arcos (CD, DE e EC) juntos coincidem com a circunferência. Na alínea b), para determinar a amplitude do ângulo inscrito CDE os alunos determinaram a metade das amplitudes do arco obtidas na alínea anterior justificando com o facto da amplitude de um ângulo inscrito ser metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados. Na alínea c) também, com facilidade, a turma determinou a amplitude do ângulo ex-inscrito EDB, tendo em conta que os ângulos CDE e EDB são suplementares, subtraindo assim à amplitude do ângulo raso a amplitudes do ângulo inscrito obtidas na alínea anterior (Ver na figura 38 uma das resoluções).



a) em cada uma das figuras qual a amplitude do arco CE? Justifica.

I - A amplitude do arco CE é 116°, porque uma circunferência tem sempre 360° então 131° + 113° = 244° e 360° - 244° = 116°

II - A amplitude do arco CE é 102°, porque uma circunferência tem sempre 360° então 202° - 56° = 258° e 360 - 258° = 102°

b) determina a medida da amplitude dos ângulos CDE, em cada uma das figuras.

I - A amplitude do ângulo CDE é 58° porque a amplitude de um ângulo inscrito é igual à metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados.

II - A amplitude do ângulo CDE é 54° porque a amplitude de um ângulo inscrito é igual à metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados.

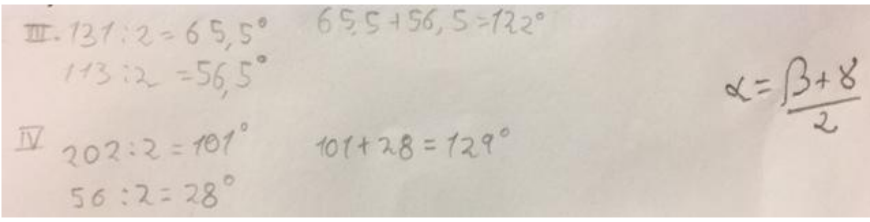
c) determina a medida da amplitude dos ângulos BDE, designados por α, em cada uma das figuras.

I - A amplitude do ângulo BDE é 132° porque BDC é um ângulo raso (180°) e CDE = 58°, visto que a soma das amplitudes é 360°, então, 180° + 58° = 228° e 360° - 228° = 132°.

II - A amplitude do ângulo BDE é 130° porque $B\hat{D}C$ é um ângulo raso (180°) e $C\hat{D}E$ = 84°, visto que a soma das amplitudes é 360°, então, 180° + 84° = 224° e 360° - 224° = 136°.

Figura 38 – Resolução das alíneas 2.a), 2.b) e 2.c) de Marcelo e Maria

Na alínea 2.d) solicita-se aos alunos uma conjetura para a relação entre a amplitude do ângulo ex-inscrito (α) e a amplitude dos arcos correspondentes às cordas que as retas suporte dos lados contêm (β e γ). Tendo em conta os cálculos efetuados nas alíneas anteriores, chamados à atenção para procurar uma relação os alunos induziram com alguma facilidade que os valores obtidos na alínea anterior coincidiam com a metade da soma dos arcos correspondentes às cordas. Na figura 39 encontra-se um exemplo de um par de alunos que verificou os cálculos e conjeturou, tal como a generalidade dos pares.



III. 131 : 2 = 65,5°   65,5 + 56,5 = 122°

113 : 2 = 56,5°

IV 202 : 2 = 101°   101 + 28 = 129°

56 : 2 = 28°

$\alpha = \frac{\beta + \gamma}{2}$

Figura 39 – Resolução de Alice e Alexandre da alínea 2.d)

Na alínea 2.e) os alunos deveriam demonstrar a sua conjetura algebricamente, usando as letras da figura e justificando. Surgiram muitas dificuldades, mas menos que na alínea 1.e), talvez devido à maior simplicidade das expressões algébricas construídas. Ainda assim foram gastos muita borracha e muito lápis enquanto os alunos iam tentando demonstrar a generalização obtida. Não surgiram tentativas evasivas e com maior ou menor intervenção da minha parte ou dos colegas os alunos obtiveram as suas demonstrações.

Saliento que os alunos recorreram, essencialmente, a duas justificações diferentes. Uma delas baseia-se na propriedade de que num triângulo cada ângulo externo é igual à soma dos ângulos internos não adjacentes, propriedade estudada no 6º ano, que alguns alunos (três pares) recordaram e me questionaram sobre a sua aplicabilidade à situação. Dada a minha anuência seguiram para a justificação e concretizaram-na. Um exemplo dessa forma de justificar encontra-se na figura 40.

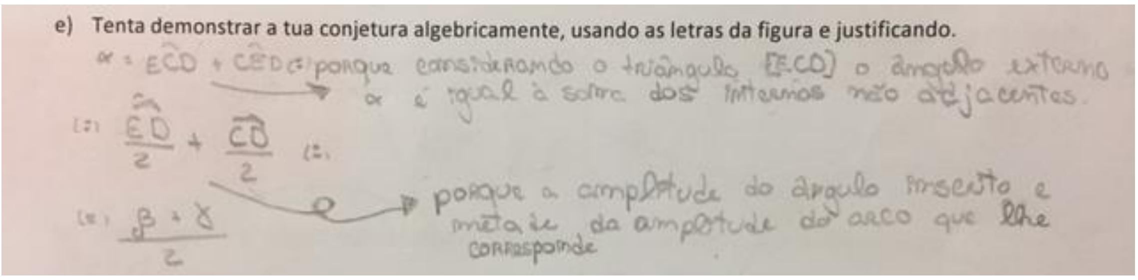


Figura 40 - Resolução de Rita e João da alínea 2.e)

A outra forma de justificar, escolhida pelos restantes pares, baseia-se no facto do ângulo ex-inscrito (α) ser suplementar com o ângulo inscrito CDE, a amplitude deste medir metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados e a amplitude deste arco coincidir com a diferença entre a amplitude de um ângulo giro e a soma das amplitudes dos arcos (β e γ). A figura 41 mostra um exemplo de uma justificação com estas caraterísticas.

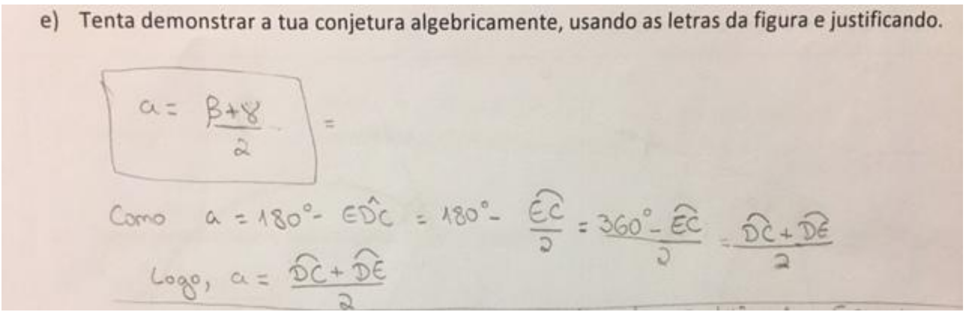


Figura 41 – Resolução de Sara e Rúben da alínea 2.e)

Em ambas as figuras se encontram erros de linguagem formal, como sendo a utilização errada do sinal de "$\Leftrightarrow$", simbologia diferente para designar a mesma identidade, por exemplo. Os alunos foram chamados à atenção para retificar estas situações posteriormente, não durante o processo de construção da justificação, para não os desfocar do processo de pensamento algébrico, cuja exigência e dificuldade reconheço neste nível de ensino.

A aula terminou sem discussão coletiva, fui acompanhando e apoiando os pares no seu trabalho autónomo. O trabalho descrito terminou mesmo ao toque para o final da aula, recolhi os enunciados e sugeri os exercícios de consolidação propostos no final da tarefa. Refira-se ainda que nenhum dos pares requereu os ficheiros do *GeoGebra* que tinha levado preparados com as figuras que constavam do enunciado, mas manipuláveis. As propriedades foram induzidas a partir das figuras estáticas, os alunos não sentiram necessidade de ver outros casos para além dos expostos.

Análise. Esta tarefa encontra-se dividida em duas partes, sendo a primeira relativa à amplitude do ângulo de segmento (questão 1) e segunda relativa à amplitude do ângulo ex-inscrito (questão 2). Em cada uma delas, o objetivo era que os alunos induzissem uma propriedade e a demonstrassem. As primeiras três alíneas de cada questão são exercícios de cálculo referentes a propriedades de ângulos e triângulos anteriormente estudadas. Não se registaram quaisquer dificuldades por parte dos alunos. Na quarta alínea de cada questão, os alunos deveriam procurar relações e conjeturar generalizações. Aqui também não constatei dificuldades, embora, de uma forma geral, entre cada par de alunos se verifique uma maior apetência de um dos elementos para este tipo de atividade. Verifiquei que um aluno avança com a conjetura, esclarece com o outro quando há necessidade, e ambos aferem eventualmente as variáveis a utilizar e a forma de exprimir as generalizações visadas para o resultado final ser consensual. Os alunos usaram mais uma vez raciocínio indutivo, a partir do que observaram, para generalizar. Neste caso, recorreram a imagens estáticas, sem as manipular, ao contrário do que aconteceu nas tarefas anteriores.

No caso da primeira propriedade, os alunos partiram do cálculo efetuado nas três primeiras alíneas para os dois casos concretos apresentados, substituindo os números por letras. Procuraram, assim, realizar um procedimento algébrico semelhante ao numérico, mas o facto de não ser possível subtrair monómios com partes literais diferentes trouxe dificuldades. Alguns alunos cometiam erros na justificação, escrevendo o resultado final como se fosse deduzido da passagem anterior, ou seja, "fazendo batota", saltando passos intermédios no desenvolvimento da expressão algébrica numa tentativa de ultrapassar a dificuldade, pois não sabiam como proceder. Além das omissões, um dos erros mais comuns foi esquecer que um sinal negativo antes de um traço de fração afeta todas as parcelas do numerador, ou seja, transforma cada parcela no seu simétrico. Nesses casos chamei à atenção para os erros e omissões no desenvolvimento das expressões ou sugeri a forma de ultrapassar a dificuldade. Em todas as situações o pensamento geométrico esteve patente e surgiram dois processos de raciocínio distintos, recorrendo a propriedades diferentes. Houve alunos que recorreram ao facto do ângulo de segmento ser complementar com um ângulo inscrito de um triângulo isósceles, ou seja, complementar com um ângulo cuja amplitude é metade da diferença entre a amplitude de um ângulo raso e a amplitude do ângulo ao centro. Outros alunos basearam a sua justificação no facto da amplitude do ângulo complementar ao ângulo de segmento ser metade da amplitude do arco que lhe corresponde. Três pares de alunos conseguiram expressar verbalmente os seus raciocínios mas revelaram dificuldade em os apresentar por escrito e só o conseguiram concretizar com o meu apoio e acompanhamento. As dificuldades foram muito evidentes no cálculo algébrico.

Na situação da segunda propriedade verifiquei uma maior desenvoltura no cálculo algébrico por parte dos alunos, tendo surgido também dois processos distintos de raciocínio. Alguns alunos recorreram ao facto de num triângulo cada ângulo externo ser igual à soma dos ângulos internos não adjacentes, outros basearam a sua justificação no facto do ângulo ex-inscrito ser suplementar do ângulo inscrito, a amplitude deste último medir metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados e a amplitude deste arco coincidir com a diferença entre a amplitude de um ângulo giro e a soma das amplitudes de dois arcos de amplitude conhecida. É possível que a maior desenvoltura na justificação algébrica se deva ao trabalho anterior, aliada ao facto da expressão a desenvolver, sem parênteses, ser visivelmente mais simples. Apesar das dificuldades, os alunos conseguiram justificar as generalizações que obtiveram. De notar que, dos catorze pares de alunos quatro conseguiram obter a demonstração de forma completamente autónoma.

5.6. Tarefa 6 – Circunferência – ângulo de vértice no interior do círculo, ângulo de vértice exterior a um círculo

Depois de concluídas as questões da tarefa anterior, a aula de quarenta e cinco minutos que se seguiu foi inteiramente preenchida com a realização de exercícios de consolidação do manual, sugeridos no final. Assim para a tarefa 6 voltamos a ter disponível um bloco de 90 minutos. A aula iniciou-se com a apresentação aos alunos dos conceitos de ângulo de vértice no interior do círculo e de ângulo de vértice exterior a um círculo de acordo com o constante no Anexo IV (definições).

Por irem regressar ao trabalho com o programa *GeoGebra*, os alunos apressaram-se a colaborar comigo na distribuição dos computadores e dos enunciados das tarefas pela turma. Rapidamente deram início às suas construções. A primeira, já bastante familiar, é de uma circunferência seguindo os passos de 1 a 5. Feita esta primeira construção de base é sugerida a construção de um ângulo de vértice no interior do círculo correspondente à circunferência e de um triângulo cujos vértices são o vértice do ângulo referido e os extremos do arco compreendido entre os seus lados, seguindo neste caso os passos entre 6 e 12.

O objetivo é descobrir como determinar a amplitude do ângulo de vértice no interior do círculo, relacionando-a com as amplitudes dos arcos compreendidos entre os lados do ângulo e os lados do ângulo que lhe fica verticalmente oposto. Na figura 42 observa-se uma dessas construções.

Os alunos voltaram a mostrar alguma destreza e rapidez na construção bem como algum cuidado na seleção dos rótulos dos objetos apresentados, mantendo os relevantes e eliminando os desnecessários. Para a consecução do objetivo os alunos deveriam registar numa tabela os dados observados em cinco situações distintas, obtidas a partir de movimentações dos pontos sobre a circunferência, nomeadamente os pontos C e D. Na figura 43 observa-se um exemplo de uma dessas tabelas preenchidas.

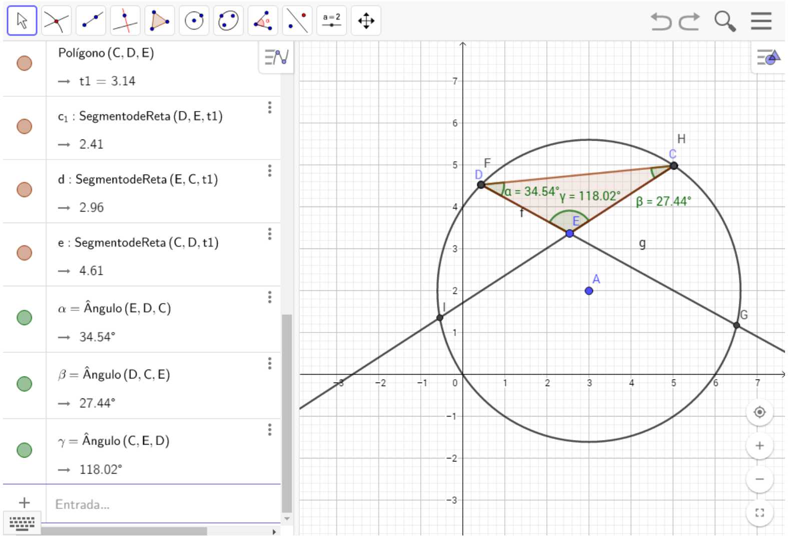


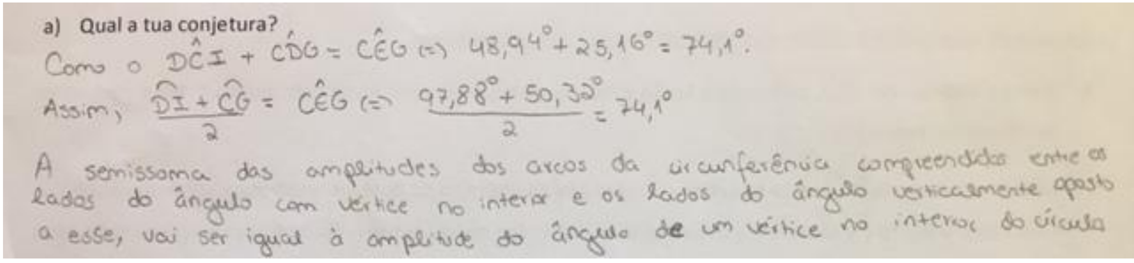
Figura 42 – Construção do ângulo de vértice no interior do círculo de Mário e Luísa

Amplitude do ângulo de vértice no interior de um círculo CEG	180 - 66,56 = = 113,44°	180 - 73,81 = 106,19°	180 - 63,16 = = 116,84°	83,73°	112,4°
Amplitude do ângulo DCI	50,74°	64,58°	59,98°	50,54°	46,72
Amplitude do arco DI	50,74×2 = 101,48°	64,58 × 2 = = 129,16°	119,96°	101,04°	85,44°
Amplitude do ângulo CDG	62,71°	41,6°	56,66°	33,21°	65,65°
Amplitude do arco CG	62,71 × 2 = = 125,42°	41,6 × 2 = 83,2°	113,32°	66,42°	13,3°

Figura 43 – Tabela preenchida por Catarina e Pedro

Para o preenchimento da tabela os alunos: determinavam o valor da amplitude do ângulo de vértice no interior do círculo, a registar na primeira linha, subtraindo à amplitude do ângulo raso a amplitude do ângulo interno do triângulo que lhe é suplementar; observavam e registavam os valores da segunda e da quarta linha a partir da figura e/ou da folha algébrica; obtinham os valores da terceira e da quinta linha multiplicando por dois os valores da segunda e da quarta linha, respetivamente, uma vez que dizem respeito às amplitudes dos arcos correspondentes a esses ângulos inscritos na circunferência e também ângulos internos do triângulo. Considerei a construção do triângulo importante precisamente para o preenchimento da tabela e também para facilitar a conjetura e consequente justificação.

A generalidade da turma conseguiu completar a tabela com sucesso, três dos pares com algumas dicas dos pares próximos. A partir da observação dos dados registados na tabela os alunos foram unânimes em conjeturar que a amplitude do ângulo de vértice no interior do círculo é igual à soma dos ângulos inscritos na circunferência que coincidem com os ângulos internos do triângulo não adjacentes. Em alguns casos confirmaram primeiro com um exemplo e depois então conjeturaram, como se observa na figura 44.


a) Qual a tua conjetura?

Como o $D\hat{C}I + C\hat{D}G = C\hat{E}G \Leftrightarrow 48{,}94^\circ + 25{,}16^\circ = 74{,}1^\circ$.

Assim, $\frac{\overset{\frown}{DI} + \overset{\frown}{CG}}{2} = C\hat{E}G \Leftrightarrow \frac{97{,}88^\circ + 50{,}32^\circ}{2} = 74{,}1^\circ$

A semissoma das amplitudes dos arcos da circunferência compreendidos entre os lados do ângulo com vértice no interior e os lados do ângulo verticalmente oposto a esse, vai ser igual à amplitude do ângulo de um vértice no interior do círculo

Figura 44 – Confirmação de Catarina e Pedro recorrendo à propriedade descrita e consequente conjetura

A justificação surgiu de uma forma quase imediata, tendo em conta a propriedade de que num triângulo a amplitude de cada ângulo externo é igual à soma das amplitudes dos ângulos internos não adjacentes, já recordada e abordada em situações anteriores. A partir daqui, como a amplitude do ângulo inscrito coincide com metade da amplitude do arco que lhe corresponde, os alunos generalizaram que a amplitude de um ângulo de vértice no interior de um círculo é igual a metade da soma das amplitudes dos arcos compreendidos entre os lados do ângulo e os lados do ângulo que lhe é verticalmente oposto.

É relevante referir que alguns alunos aparentam procurar justificar quase que em simultâneo com a atividade de conjeturar. Esta situação repetiu-se em três outros pares. A conjetura surge, confirmam mas já a pensar na justificação. Dois destes pares de alunos recorreram à propriedade referida no parágrafo anterior mas houve também dois destes pares de alunos que não recorreram a esta propriedade diretamente, usaram em vez disso as duas propriedades que a fundamentam, ou seja, o facto da soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo ser igual a 180^0 e o facto de um ângulo interno e um ângulo externo adjacente serem suplementares. Como exemplo dessa forma de justificar observe-se a figura 45.

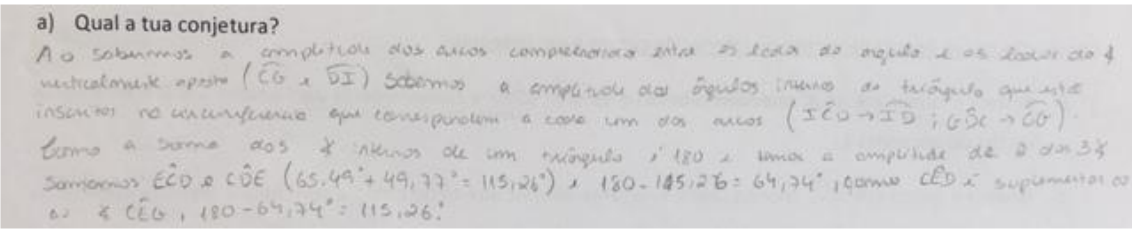


Figura 45 – Conjetura e justificação em simultâneo de Tiago e José.

Para continuar a investigar, agora acerca da amplitude de um ângulo com o vértice no exterior da circunferência, é sugerido aos alunos que arrastem o ponto E, no interior do círculo na situação anterior e que formem um outro triângulo. Dois ângulos internos desse triângulo são ângulos inscritos cujos arcos correspondentes são os arcos compreendidos entre os lados do ângulo de vértice no exterior do círculo. As construções ficaram, de um modo geral, muito semelhantes à que se observa na figura 46.

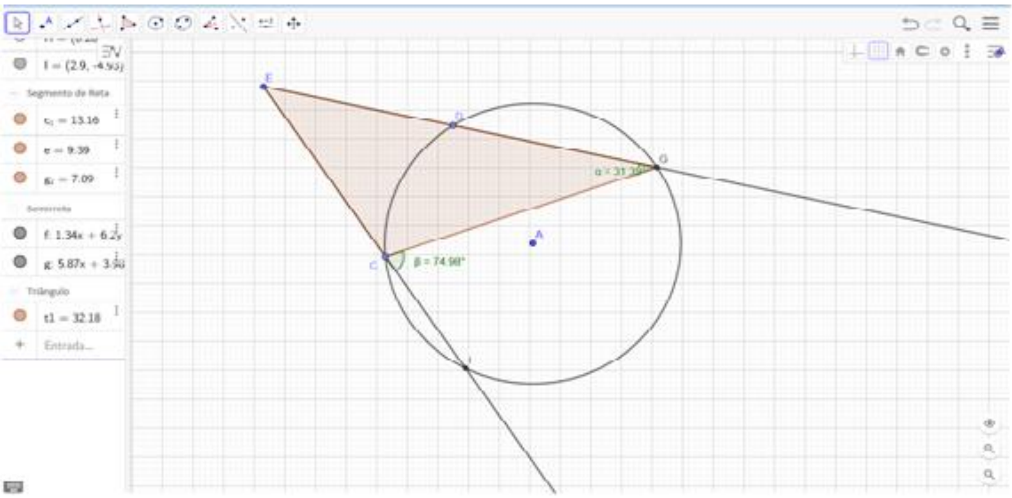


Figura 46 – Construção do ângulo de vértice no exterior do círculo de André e Mariana

Com vista a fazer surgir uma conjetura os alunos deveriam movimentar os vértices do triângulo e registar, para cada simulação, a amplitude do ângulo de vértice exterior a um círculo (primeira linha), as amplitudes dos restantes ângulos internos do triângulo (segunda e quarta linhas) e as amplitudes dos arcos correspondentes a esses ângulos internos (terceira e quinta linhas) que se obtêm multiplicando, respetivamente, as linhas anteriores por dois. Encontro um exemplo desse registo na figura 47.

Amplitude do ângulo de vértice exterior a um círculo CED	43,59	44,81	47,9	37,27	27,37
Amplitude do ângulo CGD	31,39	18,34	21,73	19,72	10,92
Amplitude do arco CD	31,39 x 2= = 62,78	18,34x2= = 36,68	21,73x2= =43,46	19,72x2 = =39,44	10,92x2= =21,84
Amplitude do ângulo GCF	74,98	63,15	69,63	56,99	38,29
Amplitude do arco FG	74,98x2= = 149,96	63,15x2= = 126,3	69,63x2= = 139,26	56,99x2 = =113,98	38,29x2= = 76,58

Figura 47 – Tabela de Ana e Guilherme

Ainda enquanto iam fazendo os registos nas respetivas tabelas os pares de alunos foram constatando que a amplitude do ângulo de vértice no exterior do círculo era igual à diferença entre o maior ângulo inscrito e o menor ângulo inscrito. Todos os alunos lançaram essa conjetura, a diferença verificou-se ao nível do número de exemplos observados por cada par até a constatarem. Mas o apelo era relacionar com as amplitudes dos arcos compreendidos entre os seus lados e assim, como a amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do arco que lhes corresponde, a generalidade dos alunos deduziu que a amplitude de um ângulo com vértice no exterior de um círculo é igual a metade da diferença entre as amplitudes dos arcos, maior e menor, compreendidos entre os seus lados.

O trabalho desenvolveu-se de forma autónoma e até a justificação surgiu de forma célere. A presença do triângulo indiciava que as suas propriedades e dos seus ângulos fossem pertinentes para a justificação. Assim, talvez devido à ainda recente utilização da propriedade que relaciona a amplitude de um ângulo externo com as amplitudes dos ângulos internos não adjacentes, esta foi rapidamente referida pela maioria dos pares de alunos. Apenas tive de dar um apoio mais individualizado e de alguma forma direcionar o raciocínio de três pares de alunos, apelando a que se tentassem recordar das propriedades dos triângulos usadas recentemente.

Inicialmente tinha previsto uma discussão coletiva para a justificação da conjetura, mas de acordo com a forma como o trabalho foi desenvolvido, considerei-a desnecessária. Os alunos justificaram recorrendo apenas a linguagem corrente com a propriedade já referida, não utilizaram expressões algébricas, mas todos com mais ou menos intervenção da minha parte e de outros pares de alunos conseguiram justificar a conjetura. O processo de construção, generalização e justificação terminou cerca de vinte minutos antes de terminar a aula. Ao seu ritmo, e consoante eu ia circulando entre os pares e dava a minha anuência ao trabalho desenvolvido, os alunos iam-se dedicando à realização dos exercícios de consolidação sugeridos.

Análise. Esta tarefa consistia numa primeira construção de base de uma circunferência, de um ângulo no interior de uma circunferência e de um triângulo. Numa segunda construção, os alunos tinham apenas de fazer algumas alterações à construção inicial e complementá-la seguindo as indicações dadas no enunciado. O objetivo destas construções era o estudo de duas propriedades acerca da amplitude de um ângulo no interior de uma circunferência e da amplitude de um ângulo no exterior do círculo.

A conjetura da primeira propriedade surgiu de uma forma indutiva e quase imediata a partir das construções e dos registos efetuados na tabela. Assim, a partir dos casos concretos observados, os alunos conjeturaram que a amplitude de um ângulo de vértice no interior de um círculo é igual a metade da soma das amplitudes dos arcos compreendidos entre os lados do ângulo e os lados do ângulo verticalmente oposto. Tanto ao nível da construção como da conjetura não se registaram dificuldades.

Alguns pares de alunos ainda utilizaram casos concretos em que a conjetura se verificava para tentar justificar a generalização efetuada. No entanto, pela primeira vez nesta unidade de ensino, alguns pares de alunos fundiram a conjetura com a justificação. Isto é, cientes da necessidade de justificar, enquanto descreviam a sua generalização, iam justificando em simultâneo o motivo pelo qual essa justificação era válida, recorrendo a propriedades já estudadas ou recordadas. Trata-se de uma evolução muito positiva no processo de justificação, que se verificou em quatro pares de alunos.

Alterando a construção inicial, os alunos construíram um ângulo com vértice no exterior do círculo e um triângulo. Os alunos verificaram que a simples existência de um triângulo na construção era uma sugestão para a justificação. Já nas tarefas anteriores as propriedades dos triângulos e dos seus ângulos tinham sido frequentemente utilizadas. Mais uma vez, os alunos revelaram facilidade em realizar construções e em manipulá-las para obter casos concretos distintos e conjeturaram de forma indutiva por observação desses casos concretos. Generalizaram assim que a amplitude do ângulo de vértice no exterior de um círculo é igual a metade da diferença entre os arcos, maior e menor, compreendidos entre os lados do ângulo.

A realização da tarefa decorreu de forma autónoma, em pares, tendo-me eu limitado a acompanhar e estimular o trabalho em curso. Com exceção de três pares de alunos, todos justificaram a propriedade obtida com o facto de num triângulo a amplitude de um ângulo externo ser igual à soma das amplitudes dos ângulos internos não adjacentes e, como tal, a amplitude de um ângulo interno ser igual à diferença entre a amplitude de um ângulo externo e a amplitude do outro ângulo interno, não adjacente a este. Todos os pares de alunos que justificaram corretamente a propriedade, fizeram-no escrevendo-a em linguagem corrente, usando a linguagem simbólica apenas para exemplificar o que tinham descrito.

5.7. Tarefa 7 – Circunferência – Soma dos ângulos internos e externos de um polígono; polígono inscrito numa circunferência

Na continuação da tarefa anterior, alguns alunos já tinham iniciado os exercícios de consolidação, outros iniciaram-nos e concluíram em casa. Assim, a aula iniciou-se com a correção do trabalho de casa e esclarecimento de dúvidas sobre os assuntos abordados nas aulas anteriores. Esta atividade ocupou cerca de 30 minutos da aula.

Posteriormente, recordei com os alunos os conceitos de polígono, polígono regular, ângulo interno e externo de um polígono, polígono convexo e polígono côncavo, polígono inscrito numa circunferência. Alguns destes conceitos foram abordados no 2.º ano, outros no 4.º ano, e outros mais recentemente no 7.º ano. Estas definições encontram-se no Anexo IV (definições).

As fórmulas que permitem obter a soma dos ângulos internos e a soma dos ângulos externos de um polígono convexo também são aprendizagens previstas do programa atual do 7.º ano. Agora, no 9.º ano, é suposto os alunos provarem estas generalizações. No entanto, considerei importante que os alunos se familiarizassem com as fórmulas antes de partirem para a sua demonstração.

Sabendo que num polígono convexo com n lados a soma das amplitudes dos ângulos internos é dada por $(n-2) \times 180^0$ e que a soma das amplitudes dos ângulos externos é 360^0, os alunos iniciaram o seu trabalho com o *GeoGebra* construindo um polígono convexo com sete lados e medindo cada um dos ângulos internos e externos, seguindo os passos de 1 a 4. Um exemplo dessa construção encontra-se na figura 48.

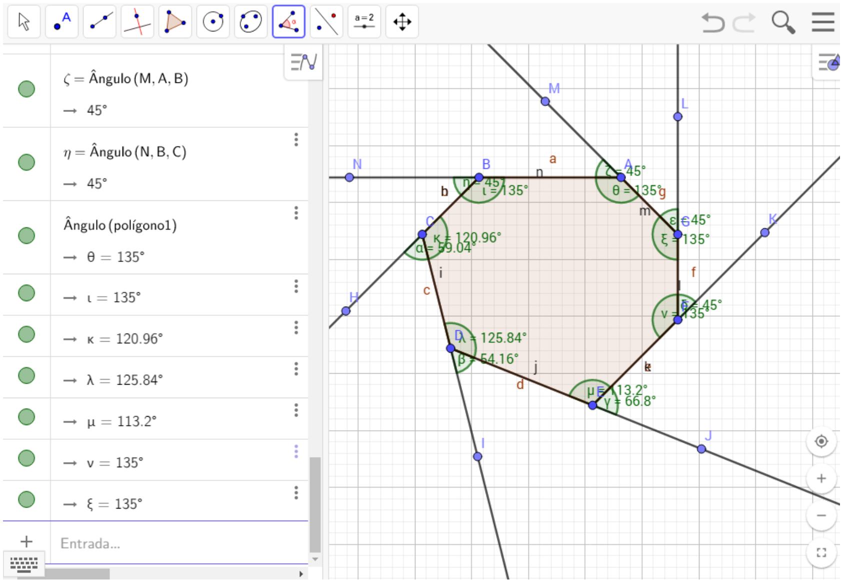
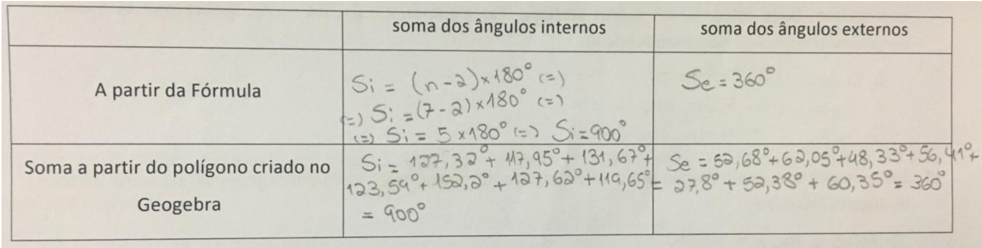


Figura 48 – Construção de Ana e Guilherme

No passo 5 o objetivo era que os alunos determinassem a soma dos ângulos internos e a soma dos ângulos externos, quer a partir da fórmula, quer efetuando aritmeticamente a soma das amplitudes dos ângulos do polígono cuja construção efetuaram. Na maioria dos casos as somas deram exatamente igual nas duas formas de cálculo, como no exemplo dado na figura 49.



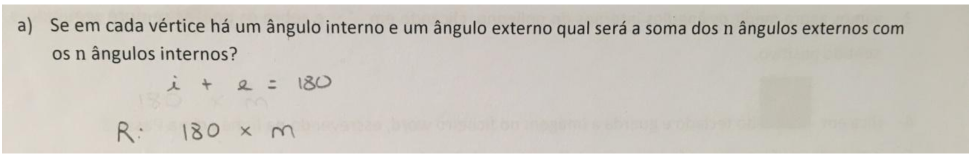
	soma dos ângulos internos	soma dos ângulos externos
A partir da Fórmula	$S_i = (n-2) \times 180°$ (=) (=) $S_i = (7-2) \times 180°$ (=) (=) $S_i = 5 \times 180°$ (=) $S_i = 900°$	$S_e = 360°$
Soma a partir do polígono criado no Geogebra	$S_i = 127,32° + 117,95° + 131,67° + 123,59° + 152,2° + 127,62° + 119,65° = 900°$	$S_e = 52,68° + 62,05° + 48,33° + 56,41° + 27,8° + 52,38° + 60,35° = 360°$

Figura 49 – Tabela construída no passo 5 por Maria e Marcelo

No entanto, nalguns casos devido à apresentação das amplitudes dos ângulos com arredondamentos com duas casas decimais os valores das somas determinadas aritmeticamente surgiram com erro de uma centésima, obviamente desvalorizado pelos alunos. Apenas dois pares de alunos me solicitaram esclarecimento a propósito dessa ocorrência. Esclarecidos, encararam esse facto com normalidade, compreendendo que não põe em causa a correção das fórmulas em causa.

Ainda para se familiarizarem com as fórmulas, nos passos 6 a 11, os pares de alunos deveriam construir um outro polígono convexo, agora com um número de lados à sua escolha, seguindo os restantes passos de forma análoga ao efetuado anteriormente com o heptágono. A maioria dos pares de alunos construiu um pentágono e repetiu o processo, verificando que somando aritmeticamente as amplitudes dos ângulos se obtém o valor obtido diretamente das fórmulas.

Concluída a construção inicial da questão 1, a tarefa apresentava várias alíneas com o objetivo de deduzir e justificar a expressão, já utilizada e conhecida, que permite obter a soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono de n lados. Na alínea a), todos os pares de alunos responderam sem dificuldade que a soma das amplitudes da totalidade dos ângulos internos e externos é $180n$ tendo em conta que em cada vértice o ângulo interno e o ângulo externo são suplementares, pela própria definição de ângulo externo. Um exemplo de resposta dos alunos observa-se na figura 50.



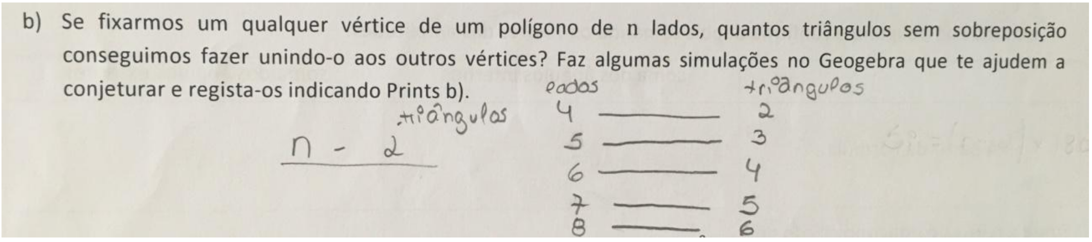
a) Se em cada vértice há um ângulo interno e um ângulo externo qual será a soma dos n ângulos externos com os n ângulos internos?

$i + e = 180$

R: $180 \times m$

Figura 50 – Resposta à alínea a) de Maria e Marcelo

Na alínea b), os alunos eram incitados a fazer uma representação mental ou gráfica, em papel ou no *GeoGebra*, da situação em que, escolhido ao acaso um vértice de um polígono de n lados, era pedido para descobrir quantos triângulos se obtêm, sem sobreposição, unindo-o aos outros vértices. Houve alunos a fazer esquemas (figura 51), outros conjeturaram uma expressão para o número de triângulos e verificaram com um exemplo (figura 52).

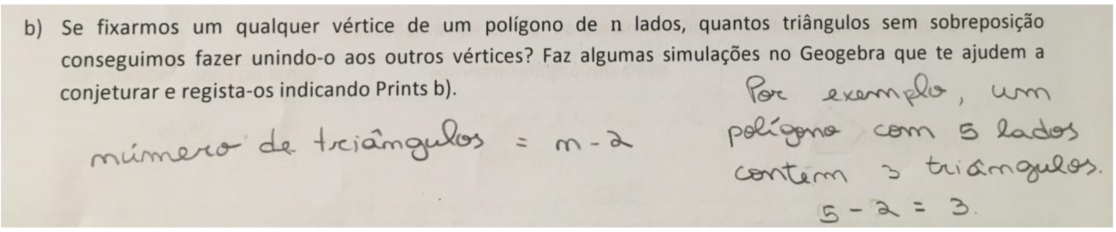


b) Se fixarmos um qualquer vértice de um polígono de n lados, quantos triângulos sem sobreposição conseguimos fazer unindo-o aos outros vértices? Faz algumas simulações no Geogebra que te ajudem a conjeturar e regista-os indicando Prints b).

triângulos
n - 2

lados	triângulos
4	2
5	3
6	4
7	5
8	6

Figura 51 – Resposta de Tomás e Madalena



b) Se fixarmos um qualquer vértice de um polígono de n lados, quantos triângulos sem sobreposição conseguimos fazer unindo-o aos outros vértices? Faz algumas simulações no Geogebra que te ajudem a conjeturar e regista-os indicando Prints b).

número de triângulos = n - 2

Por exemplo, um polígono com 5 lados contem 3 triângulos.
5 - 2 = 3.

Figura 52 – Resposta de Maria e Marcelo

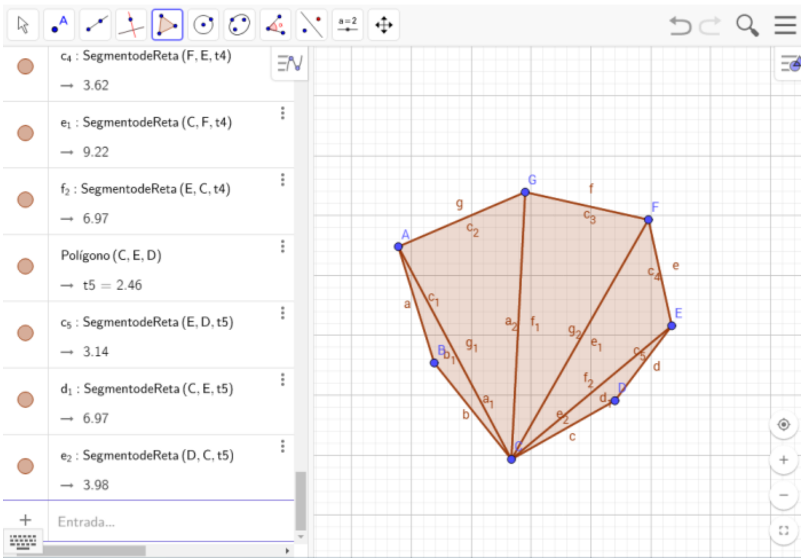
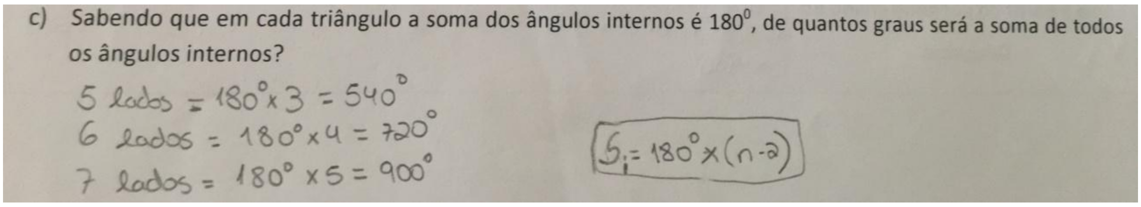


Figura 53 – Uma das construções de Marta e Bernardo apresentadas em Prints b)

Outros pares de alunos, cerca de metade, construíram no *GeoGebra* alguns polígonos, à semelhança do heptágono apresentado na figura 53, com os respetivos triângulos construídos da forma descrita no enunciado, variando o número de lados.

De acordo com o que observaram, elaboraram um esquema semelhante ao apresentado na figura 49 e conjeturaram a expressão para o número de triângulos consoante o número de lados. De qualquer das formas todos os alunos apresentaram a resposta correta $n-2$ para o número de triângulos construídos nestas condições.

Assim sendo, facilmente os alunos multiplicaram o número de triângulos obtido na alínea anterior por 180^0 dado que a soma das amplitudes dos ângulos internos de cada triângulo é um ângulo raso. Nalguns casos voltaram a verificar com exemplos, como se observa na figura 54.



c) Sabendo que em cada triângulo a soma dos ângulos internos é 180^0, de quantos graus será a soma de todos os ângulos internos?

5 lados $= 180^\circ \times 3 = 540^\circ$

6 lados $= 180^\circ \times 4 = 720^\circ$

7 lados $= 180^\circ \times 5 = 900^\circ$

$\boxed{S_i = 180^\circ \times (n-2)}$

Figura 54 – Resposta de Alexandre e Alice à alínea 1.c)

No que se refere à alínea d), o objetivo era que os alunos deduzissem uma propriedade já conhecida, aquela que afirma que a soma das amplitudes dos ângulos externos de um polígono é 360^0. Na alínea a) os alunos já tinham concluído e justificado que a soma das amplitudes de todos os ângulos internos e externos de um polígono convexo com n lados é dado pela expressão $180n$ e na alínea anterior tinham concluído e justificado que a soma das amplitudes dos ângulos internos é dada pela expressão $180 \times (n-2)$. Assim a própria alínea incluía a sugestão de subtrair a expressão obtida na alínea c) à obtida na alínea a).

Mais uma vez ficaram evidenciadas as dificuldades dos alunos em desenvolver corretamente uma expressão algébrica com parênteses. Cometeram vários erros, sendo o principal não desembaraçar de denominadores antes de qualquer outra operação. Oito dos pares de alunos cometeram este erro ou não respeitaram a prioridade das operações apresentando desenvolvimentos semelhantes aos que se observam nas figuras 55 e 56. Três pares de alunos não conseguiram desenvolver a expressão deixando apenas a subtração enunciada como na figura 57 e os restantes três pares atingiram o objetivo pretendido efetuando desenvolvimentos análogos ao exposto na figura 58.

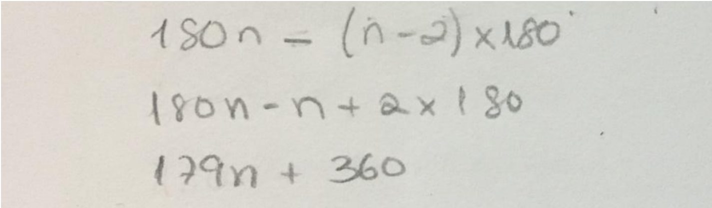


Figura 55 – Exemplo de uma resolução em que os alunos não desembaraçaram corretamente de parênteses

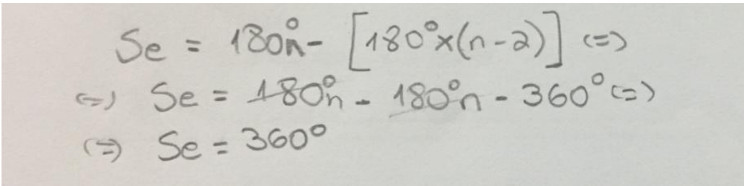


Figura 56 – Exemplo de uma resolução em que os alunos não efetuaram corretamente a multiplicação

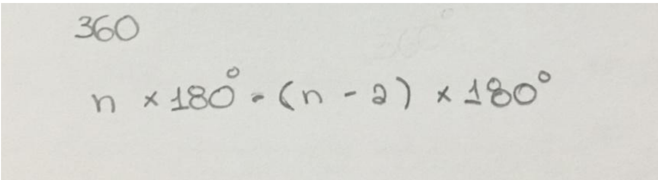


Figura 57 – Exemplo de uma resolução em que os alunos enunciaram a subtração mas não a desenvolveram

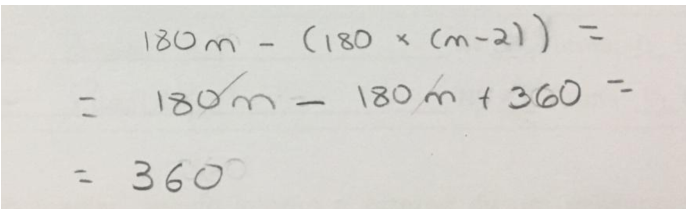


Figura 58 – Exemplo de uma resolução correta

Sabendo o resultado final a que teriam que chegar, os alunos que não conseguiram obtê-lo na primeira tentativa, procuraram encontrar onde se tinham equivocado e efetuaram as necessárias correções. Em três dos pares de alunos foi necessária a minha intervenção para a obtenção do resultado de forma correta.

Nas alíneas e) e f) é proposto aos alunos deduzir fórmulas para a amplitude de um ângulo externo e interno de um polígono regular, respetivamente. Tendo em conta a definição de polígono regular todos os ângulos internos têm a mesma amplitude, bem como todos os ângulos externos, e são em número igual ao número de lados.

Assim, no seguimento das alíneas anteriores, no caso da alínea e), todos os pares de alunos deduziram que a amplitude de cada ângulo externo de um polígono regular de n lados é dada por $\frac{360}{n}$. No caso da alínea f), cerca de metade dos alunos deduziu a fórmula pretendida, tendo em conta que em cada vértice um ângulo interno e um ângulo externo são suplementares, apresentando diretamente a expressão $180 - \frac{360}{n}$. Nos restantes casos, os alunos recorreram ao facto de cada ângulo interno ter uma amplitude igual ao quociente entre a soma das amplitudes dos ângulos internos e o número de lados e assim simplesmente indicaram esse quociente, não tendo chegado à expressão mais simplificada (figura 59).

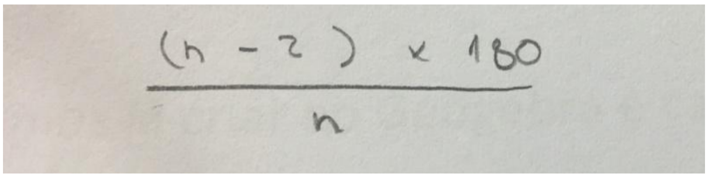


Figura 59 – Exemplo de uma resolução em que os alunos apresentam a expressão pretendida, mas não a simplificam

Finalizada a questão 1, constatei que restavam apenas 15 minutos para terminar a aula. Assim, sugeri aos alunos que deixassem a questão 2 para a próxima aula, aproveitando o tempo restante para propor para consolidação os exercícios propostos da página 139 e/ou a inserção das propriedades recentemente demonstradas no resumo teórico (Anexo VI)

Na aula seguinte, retomámos a realização da tarefa. Tratou-se de mais uma aula de 90 minutos constituída por dois blocos de 45 minutos. Achei conveniente iniciar com a correção e esclarecimento de dúvidas surgidas nos exercícios cuja resolução se tinha iniciado na aula anterior. Considerei que explorar a questão 2, que incidia sobre uma nova propriedade, não traria qualquer benefício podendo até gerar alguma confusão.

Esclarecidas as dúvidas e corrigidos os exercícios em causa, o que ocupou 20 minutos do primeiro tempo, distribui os computadores portáteis com a ajuda dos alunos. Informei-os que o capítulo estava a finalizar, que estavam prestes a conjeturar e demonstrar a última propriedade. Expliquei então a tarefa:

Professora: A ideia é imaginarem um quadrilátero inscrito numa circunferência, relembrem a definição que demos na outra aula.
Maria: Mas não é para fazermos no *GeoGebra*?
Professora: Ninguém consegue conjeturar o valor, ou dizer qualquer coisa?
(silêncio)
Professora: Então? Não vos ocorre nada?
Pedro: Só se é o facto da soma ser 360^0...
Professora: De dois ângulos internos opostos?
Pedro: Não, de todos. Mas isto é num qualquer... Não tem a ver com estar inscrito.
Professora: Sim, de facto não tem. Mais alguma ideia?
Nuno: Oh, professora, se a gente fizer no *GeoGebra* a gente vê e depois diz. Vá lá. Não é para isso que os temos aqui?
Professora: OK. Façam lá então.

Mais uma vez, verificou-se a destreza dos alunos nas construções. Em cerca de 10 minutos todos os pares de alunos tinham construído uma circunferência e, nela, inscrito um quadrilátero, complementando com a medição dos quatro ângulos internos, pois era disso que se tratava. Um exemplo de uma dessas construções observa-se na figura 60. Nesta figura constata-se que as alunas deste par também representaram os ângulos ao centro correspondentes aos dois ângulos internos opostos, possivelmente numa tentativa de procurar aplicar relações já conhecidas. À medida que iam construindo e deslocando os vértices do quadrilátero sobre a circunferência as conjeturas iam surgindo. Assim, todos responderam que a soma das amplitudes dos ângulos era 180^0. Animados os alunos iam dizendo que assim já sabiam o que dava, avançando para tentativas de justificação.

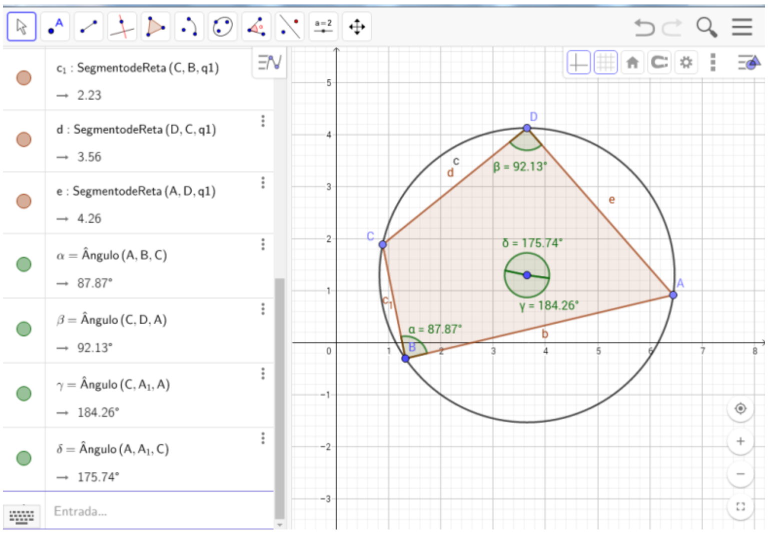


Figura 60 – Construção de Maria e Marcelo

Então retomei a discussão coletiva com os alunos:

Professora: Pois, estou a ver que agora já todos descobriram. Então vamos lá escrever aqui no quadro $\alpha + \beta = 180^0$. (e escrevi enquanto falava)

Professora: Agora quero demonstrar algebricamente porque é que é assim.

Rita: Pois, já se sabia...

Professora: Claro, até está aí no enunciado e tudo... Não está?

Rita: Oh, mesmo se não estivesse...

Professora: Então?! Vamos lá, vocês conseguem, é só pensar um bocadinho...

(silêncio)

Marta: Nós estamos aqui a experimentar uma coisa, não sei se dá...

Professora: Avança. Qual é a ideia?

Bernardo (par de Marta): Nós conseguimos transformar o quadrilátero num quadrado.

Marta: Andámos aqui a mexer nos pontos e depois apareceram dois ângulos retos e depois tentámos e conseguimos pôr os outros também retos...

Pedro: Mas isso é só mais um exemplo para ver que dá...

Professora: Sim, tens razão. Temos é de provar que dá sempre, para todos os possíveis exemplos, para todos os quadriláteros inscritos. O que fizeram é interessante mas evitem concentrar-se num exemplo. Que tipo de ângulos são os ângulos internos do quadrilátero?

Tomás: Internos!

(gargalhadas)

Professora: Sem dúvida, Tomás. Aí da tua folhinha, das definições que tens do lado esquerdo, onde podes enquadrar estes ângulos? Para além de serem internos...

Tomás: São inscritos... (afirmou com alguma incerteza observando o resumo teórico – Anexo VI – como sugeri)

Professora: Boa, Tomás!!! Isso mesmo... Agora relembra o que concluímos sobre ângulos inscritos.

Maria: É aquilo dos arcos. Pode vir aqui ver se é isto?

Professora: Eu preferia que explicasses, Maria? Pode ser?

Maria: Nós fizemos aquilo que a professora estava agora a dizer ao Tomás, fizemos os ângulos ao centro... E são dois... E dão 360^0.

Pedro: Nós também já estávamos a fazer, e dá 360^0. E como os inscritos são metade, dá 180^0. Não sabemos é como escrever...

Professora: Usa as letras que definem os arcos...

Cada par de alunos ia acompanhando, complementando as suas construções, com as amplitudes dos ângulos ao centro correspondentes aos ângulos internos opostos em causa. Reparei que dois pares estavam com mais dificuldade e fui junto deles dar um apoio mais específico. Os restantes pares encontravam-se a seguir as indicações dadas por mim e a iniciar as demonstrações. Passados alguns minutos quase todos estavam a terminar, Marcelo chamou-me e pediu-me que verificasse a demonstração que ele e Maria tinham efetuado (figura 61).

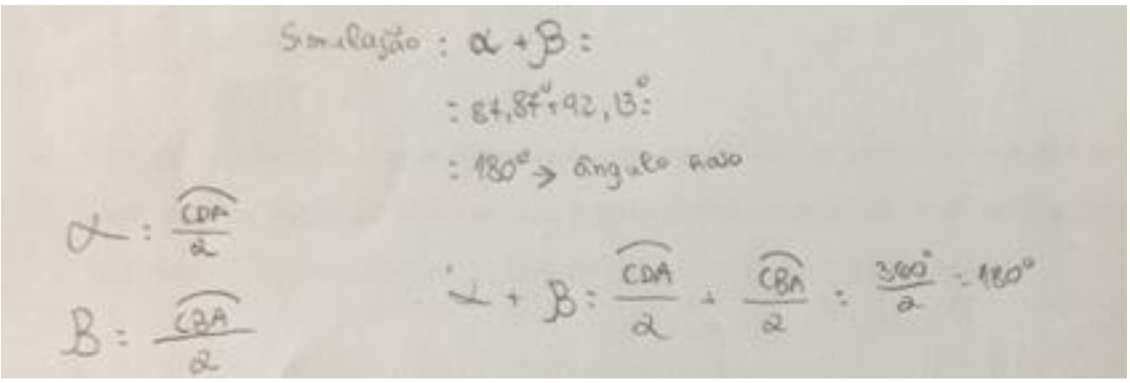


Figura 61 – Demonstração de Maria e Marcelo

Dirigi-me ao lugar e verifiquei. De seguida, solicitei a Marcelo que explicasse aos colegas o que ele e a colega tinham efetuado. Não escrevi no quadro nem solicitei ao aluno que o fizesse porque as construções foram totalmente autónomas. Assim, os alunos tinham usado letras diferentes para definir os vértices do quadrilátero e também para definir os ângulos internos opostos pelo que receei que a diversidade criasse confusão. Achei, no entanto, que talvez fosse conveniente projetar a construção daquele par de alunos para facilitar a compreensão por parte dos colegas. Mudei o cabo do projetor que estava ligado ao computador da sala para o computador de trabalho daquele par, para que o aluno projetasse a sua construção (figura 60) e dei a palavra ao aluno para explicar a sua demonstração (figura 61):

Marcelo: Então é assim. Este α aqui é um ângulo inscrito, por isso é metade deste arco aqui, o CDA. Este β aqui é o outro ângulo inscrito, por isso é metade deste arco aqui, o CBA. Mas os dois juntos dão 360^0, fecha aqui a circunferência. E como metade de 360 é 180, quer dizer que a soma é sempre 180^0.

Pedro: Aqui também deu, nós pusemos foi assim de lado em vez de ser o de cima e o de baixo.

Professora: A condição é que sejam ângulos internos opostos, não importa qual o par. Há dúvidas? Precisam que o Marcelo volte a explicar?

Os alunos apressaram-se a verificar as suas demonstrações comparando-as com a de Maria e Marcelo. Assim, os pares de alunos concluíram que a soma das amplitudes de dois ângulos internos opostos de um quadrilátero é um ângulo raso porque os ângulos internos opostos são ângulos inscritos cujos ângulos ao centro correspondentes são adjacentes que formam um ângulo giro, cuja metade é um ângulo raso. Aplicaram assim a propriedade já conjeturada e demonstrada na tarefa 4, a amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do ângulo ao centro correspondente que coincide com a amplitude do arco compreendido entre os seus lados. Quatro dos pares de alunos conseguiram demonstrar autonomamente como Maria e Marcelo, quase que em simultâneo, seis pares compreenderam e adaptaram a demonstração às suas construções e os restantes três pares precisaram de acompanhamento específico da minha parte para retificar as suas demonstrações.

Dos noventa minutos disponíveis inicialmente restavam-nos agora 15 minutos. Estes foram utilizados para trabalhar nos exercícios de consolidação propostos ainda por resolver, ou seja, os da página 143 do manual.

Análise. Esta tarefa era constituída por duas questões. A primeira incluía a construção, de um heptágono convexo e de um outro polígono convexo com o número de lados escolhido por cada par de alunos. Nos passos 5 e 11 os alunos preencheram uma tabela para se familiarizarem com as fórmulas para a obtenção da soma das amplitudes dos ângulos internos e externos verificando que a soma aritmética obtida coincidia com a soma obtida através das referidas fórmulas nos dois casos. Tanto nas construções como no preenchimento da tabela não se verificaram quaisquer dificuldades. Apenas alguns pares de alunos ficaram confusos numa primeira fase por as somas terem surgido com algumas centésimas de diferença, mas facilmente compreenderam que esse desfasamento se devia aos valores arredondados a duas casas decimais com que o *GeoGebra* apresentava as amplitudes em graus dos ângulos.

A questão 1 era constituída por várias alíneas com o objetivo de abrir caminho para culminar nas demonstrações das fórmulas da soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados nas alíneas c) e d). Neste caso, as expressões a demonstrar já eram conhecidas, não havendo necessidade de conjeturar. A estratégia utilizada para obter a demonstração na alínea c) foi decompor o polígono em triângulos com um único vértice em comum e sem sobreposições ($n-2$ triângulos) e utilizar o facto da soma dos ângulos internos de cada triângulo ser 180^0. Assim os alunos justificaram que a soma de todos os ângulos internos, por se decomporem nos ângulos internos dos vários triângulos obtidos, é dada pela expressão $S_i = (n-2) \times 180$. Esta expressão foi obtida sem qualquer dificuldade. Para demonstrar que a soma dos ângulos externos de um polígono convexo de n lados é 360^0, a estratégia foi subtrair à expressão da soma das amplitudes de todos os ângulos internos e externos de um polígono convexo com n lados obtida na línea a) ($180n$) a expressão obtida na alínea anterior para a soma das amplitudes dos ângulos internos ($180 \times (n-2)$). Os alunos obtiveram corretamente a expressão a desenvolver, a partir das alíneas anteriores, e também conheciam a expressão que deviam obter no final, mas cometiam erros no caminho. Verificaram-se dificuldades no desenvolvimento de expressões algébricas. Entre os erros mais frequentes encontra-se o não desembaraçar de denominadores antes de qualquer outra operação e o não respeitar a prioridade das operações.

Na alínea e), os alunos generalizaram sem dificuldades que a amplitude de cada ângulo externo de um polígono regular convexo de n lados é igual ao quociente entre 360^0 e o número de lados. Já na alínea f), foram obtidas duas generalizações diferentes para a amplitude de cada ângulo interno de um polígono regular convexo de n lados: uma mais simplificada $\left(180 - \frac{360}{n}\right)$ pelos alunos que entenderam o ângulo interno como a diferença entre 180^0 e a amplitude do ângulo externo; outra, ainda passível de simplificar $\left(\frac{(n-2)\times 180}{n}\right)$ pelos alunos que entenderam a amplitude de cada ângulo interno como o quociente entre a soma de todos os ângulos internos e o número de lados do polígono. No enunciado não era solicitado que obtivessem uma expressão simplificada pelo que ambas as respostas são válidas e corretas.

Já na questão 2 era solicitada uma generalização e uma justificação. A construção de um quadrilátero inscrito numa circunferência era dada aos alunos como uma opção não como uma indicação a seguir. No entanto, sem recorrer a uma figura para observar e analisar, os alunos não conseguiram formular uma conjetura. Assim que avançaram para a construção e puderam assinalar dois ângulos internos opostos do quadrilátero inscrito na circunferência, os alunos generalizaram que a soma das amplitudes de dois ângulos internos opostos de um quadrilátero inscrito numa circunferência é 180^0.

Feita a generalização era solicitada a demonstração. A justificação apresentada baseou-se nos seguintes factos já conhecidos: a amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do ângulo ao centro correspondente que coincide com a amplitude do arco compreendido entre os seus lados; a soma das amplitudes dos dois arcos correspondentes é 360^0. Cinco pares de alunos conseguiram demonstrar autonomamente a generalização e seis pares precisaram de uma ou outra sugestão para a concretizar. Os restantes três pares precisaram de acompanhamento específico da minha parte para concluir as suas demonstrações, explicando novamente as propriedades referidas.

Nesta questão foi essencial a construção no *GeoGebra* e a consequente visualização concreta da situação em causa. Só manipulando os vários vértices do quadrilátero, os alunos puderam constatar a regularidade em causa e conjeturar. Se não tivessem tido essa oportunidade não teriam conseguido generalizar.

5.8. Ficha de Trabalho para Avaliação – Circunferência

Com vista a avaliar a aquisição de conhecimentos por parte dos alunos, estes realizaram uma Ficha de Trabalho para Avaliação num tempo de 45 minutos. A ficha era composta por duas questões, a primeira com 6 alíneas. Destas, a alínea 1.1 encontrava-se subdividida em 9 subalíneas, a alínea 1.4 subdividida em 4 subalíneas e a alínea 1.5 também subdividida em 9 subalíneas. A segunda questão era constituída por três alíneas, estando a última subdividida em duas.

Esta Ficha de Trabalho foi resolvida individualmente e encontra-se no Anexo VII. Os alunos resolveram a ficha em folha própria em uso no Agrupamento, tendo um aspeto semelhante às fichas de avaliação que elaboro habitualmente para a turma. A ficha tem duas versões (versão 1 e versão 2) também como é usual, podendo as cotações ser consultadas no final como de costume. Considerei importante conservar o aspeto a que os alunos estão habituados para evitar criar focos de perturbação por usar um padrão diferente do normal. De entre as questões apresentadas considerei conveniente analisar mais detalhadamente aquelas que envolvem justificações, tendo em conta a sua pertinência no contexto deste estudo.

Numa primeira observação de resultados registei num ficheiro Excel, que pode ser consultado no Anexo IX, as caraterísticas das respostas dos alunos. Assim categorizei-as em: NR – não respondeu; C1 – resposta correta; C2 – Resposta correta usando uma notação errada e/ou erro formal; C3 – resposta correta sem justificação; C4 – Resposta correta com justificação errada; C5 – Resposta parcialmente correta (identificando o Teorema de Pitágoras como um método de resolução mas aplicando-o de forma errada); C6 – Resposta correta com justificação incompleta; C7 – Resposta correta sem respeitar as indicações do enunciado; E1 – Resposta errada devido a procedimentos inadequados; E2 – Verificação não conseguida devido a erros em cálculos intermédios.

No enunciado da questão 1 podia observar-se uma circunferência com raio 5 cm ou 3 cm, conforme a versão, e a seu lado estavam apresentadas várias condições sobre os pontos, as retas, as semirretas e os ângulos representados na figura.

Na primeira alínea, subdividida em nove subalíneas, os alunos deveriam indicar uma corda, dois raios, um diâmetro, um ângulo inscrito, um ângulo de segmento, um ângulo com o vértice no exterior da circunferência, um ângulo ao centro, um ângulo ex-inscrito e um ângulo com o vértice no interior do círculo. Nesta alínea não havia diferenças entre a versão 1 e a versão 2. O ângulo ao centro foi corretamente identificado por todos os alunos, apesar de ser apresentado usando uma notação errada por três quartos dos alunos. A corda, os dois raios, o ângulo inscrito e o diâmetro foram bem identificados por todos os alunos, com exceção de um nos três primeiros casos e com exceção de dois no último caso. No entanto, cerca de metade das identificações corretas estão apresentadas com erros na notação. O ângulo com o vértice no exterior da circunferência e o ângulo com o vértice no interior do círculo também foram bem identificados, pela maioria dos alunos (86%), registando-se também frequentes erros de notação na forma como são apresentados. Os principais erros na notação são a apresentação de um ângulo como se de um plano se tratasse e a utilização do acento circunflexo como se fosse solicitada uma amplitude. No caso da corda, do raio e do diâmetro os alunos também tendem a apresentar simplesmente duas letras maiúsculas, sem o traço superior e sem os parênteses retos. Observa-se um exemplo destas duas ocorrências na figura 62.

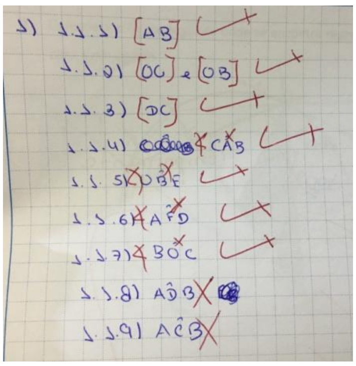


Figura 62 – Exemplo de resposta correta usando uma notação errada e/ou erro formal (versão 1)

As principais dificuldades dos alunos revelaram-se na identificação do ângulo de segmento e do ângulo ex-inscrito, tendo sido corretamente efetuada apenas em cerca de metade dos casos, verificando-se que em cerca de metade das ocorrências erradas as identificações estavam trocadas.

Na alínea 1.2 era pedida a classificação do triângulo quanto aos lados e a justificação dessa classificação. Em ambas as versões o triângulo tem como vértices o centro da circunferência e dois pontos sobre a circunferência. Assim sendo o triângulo é isósceles uma vez que dois dos seus lados são raios. Era esta justificação ou uma semelhante que esperava dos alunos. Foi o que fizeram onze alunos. Dos restantes alunos um não respondeu e nove apresentaram uma resposta errada (cerca de metade classificaram o triângulo quanto aos ângulos apresentando a resposta obtusângulo). Os dois alunos que responderam que o triângulo era isósceles e apresentaram uma justificação errada afirmaram que o facto se devia à existência de um ângulo ao centro, o que por si só não é condição suficiente para o triângulo ser isósceles. Cinco alunos apresentaram uma justificação incompleta porque afirmaram que o triângulo era isósceles porque tinha dois lados iguais sem explicar porquê, à semelhança do que se pode observar na figura 63.

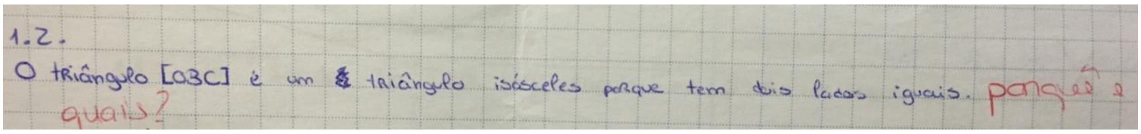


Figura 63 – Resposta correta com uma justificação incompleta (versão 2)

Tratando-se de um triângulo isósceles, na alínea 1.3 os alunos deveriam mostrar que a altura do triângulo relativamente ao lado diferente dos outros dois lados iguais, é um determinado valor (2,5 cm na versão 1 e 1,5 cm na versão 2), sendo conhecida a amplitude do ângulo oposto à base considerada do triângulo. Nesta alínea não é dada qualquer sugestão sobre a forma de obter a justificação, embora fosse previsível que os alunos recorressem ao Teorema de Pitágoras. É conveniente referir que o capítulo Trigonometria só viria a ser lecionado posteriormente, de acordo com a planificação aprovada em sede de grupo disciplinar, pelo que os alunos não têm quaisquer noções de razões trigonométricas, também aplicáveis neste contexto.

As respostas dos alunos, categorizadas no Anexo IX, mostram que seis alunos não produziram qualquer resposta, naturalmente por não saberem como o fazer. Observei ainda que sete alunos se limitaram a dividir o comprimento do raio por 2, mas sem explicar o porquê desse facto. Nestes casos considerei a resposta errada, pois por si só esta resposta não é uma justificação. Verifica-se que, por vezes, em questões deste tipo os alunos se limitam a procurar uma relação entre os dados fornecidos no enunciado e o valor a que se pretende chegar, tal como mostra a figura 64.

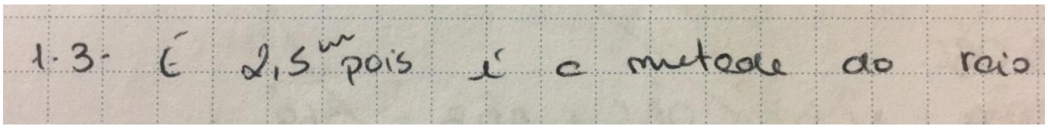


Figura 64 – Resposta errada (versão 1)

Também surgiram respostas (seis) em que os alunos identificaram o Teorema de Pitágoras como um processo para obter a justificação, mas utilizaram-no de forma errada, efetuando a soma entre o quadrado da hipotenusa e o quadrado do cateto conhecido em vez de efetuar a diferença, cometendo erros de cálculo e também do ponto de vista formal, obtendo um valor diferente do que é suposto, obviamente. Uma aluna explica a sua ideia, a sua intenção de justificação, mas ainda antes de escrever a igualdade do Teorema de Pitágoras (na qual também comete erros), esquece-se de dividir a base por dois embora explique que vai dividir o triângulo ao meio. Contrariamente ao que considerei na situação da figura 64, esta é uma resposta parcialmente certa, no meu entender, tendo em conta que o processo está bem identificado mas mal concretizado (figura 65).

Verifica-se também que nove alunos apresentaram uma resposta perfeitamente correta do ponto de vista numérico, embora menos desenvolvida em termos processuais. À luz do sugerido nos critérios de classificação das provas finais de ciclo a esta resposta deveria atribuída a cotação máxima pois os cálculos efetuados revelam o processo utilizado. É o que acontece na figura 66.

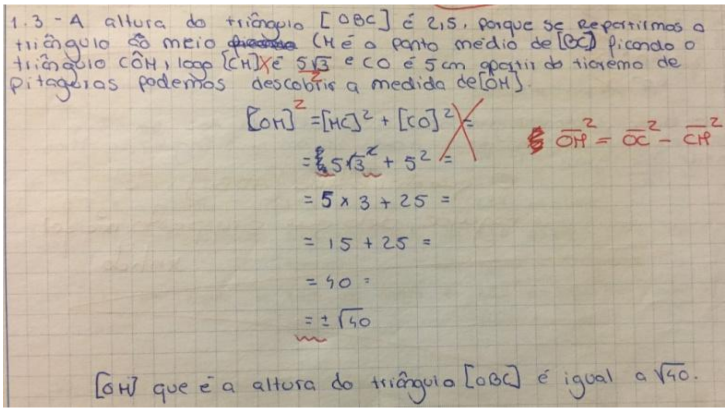


Figura 65 – Resposta parcialmente correta (identificando o Teorema de Pitágoras como um método de resolução mas aplicando-o de forma errada)

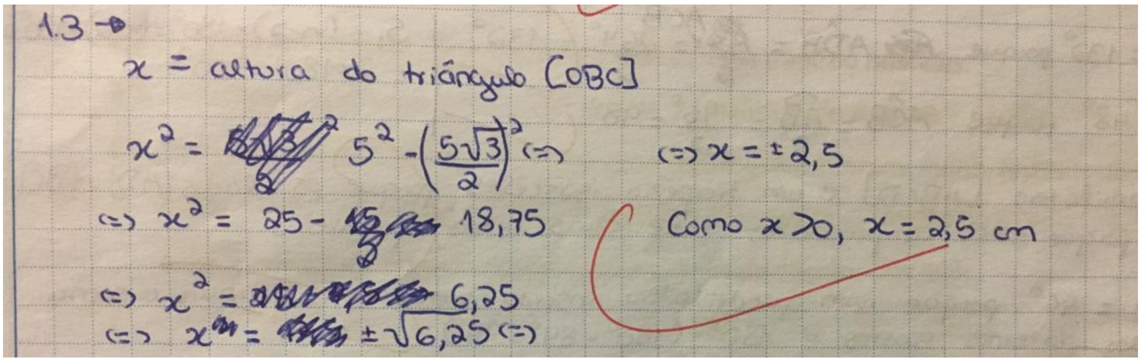


Figura 66 – Resposta correta (versão 1)

A questão 1.4 tem um cariz puramente numérico. Em ambas as versões, na alínea 1.4.1 era proposto aos alunos que determinassem o valor exato do perímetro do triângulo observado na figura 1 do enunciado. Os comprimentos dos lados já são conhecidos devendo limitar-se a somar dois números naturais iguais com um número irracional. Para obter o valor exato os alunos devem manter o comprimento da base na forma de radical. Foi o que fizeram doze dos alunos da turma e que se observa na figura 67.

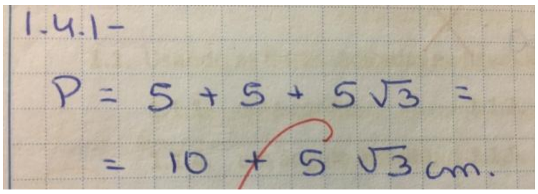


Figura 67 – Resposta correta (versão 1)

No entanto, quatro alunos não apresentaram resposta, outros quatro alunos apresentaram uma resposta errada, usando medidas erradas para o comprimento dos lados e doze alunos deram uma resposta inicialmente correta mas sem respeitar as indicações do enunciado, passando para valor aproximado ou cometendo o erro de somar indevidamente um número inteiro com um número irracional.

Na alínea 1.4.2 era solicitada a área do triângulo. Sendo conhecidas a base e a altura era suficiente determinar o valor exato de metade do produto de ambas. Apenas oito alunos cumpriram escrupulosamente as indicações do enunciado. Treze alunos efetuaram as operações necessárias mas no final apresentaram um valor aproximado e não o exato. Três alunos apresentaram uma resposta errada por não utilizarem devidamente os dados fornecidos e quatro alunos não apresentaram qualquer resposta.

Nas duas últimas alíneas de ambas as versões, 1.4.3 e 1.4.4, solicitava-se aos alunos a determinação do valor exato da área de um setor circular e do comprimento de um arco, conhecidos a amplitude do ângulo correspondente e o comprimento do raio da circunferência. Relembro que na tarefa 1 os alunos fizeram uma generalização para a obtenção dos valores solicitados. Na alínea 1.4.3, dos dezassete alunos que apresentaram uma resposta essencialmente correta, sete recorreram à regra de três simples e não aplicaram a generalização conjeturada e justificada na referida tarefa. Destes dezassete alunos oito cometeram erros de natureza formal, usando o símbolo "$\Leftrightarrow$" e/ou "$=$" erradamente. Na alínea 1.4.4 registaram-se mais respostas erradas, em que os alunos confundiram o comprimento do arco solicitado com a amplitude do arco, registando-se 12 respostas corretas, ainda que em oito dos casos se encontrem os erros já ocorridos nas outras alíneas.

No âmbito da alínea 1.5 das duas versões, os alunos deveriam determinar as amplitudes de vários ângulos e arcos, dos vários tipos abordados nesta unidade de ensino, nomeadamente inscritos, de segmento, ex-inscritos, de vértice no exterior do círculo e de vértice no interior da circunferência. Para tal deveriam ser aplicadas as generalizações obtidas no decorrer das tarefas. Analisando os resultados das nove alíneas em que a alínea 1.5 se subdivide, constatei que treze alunos cumpriram integralmente este objetivo, em média por alínea. Também, sete em média, apresentam a resolução correta, mas não apresentam as justificações. As respostas erradas são, em média, 5 por alínea e observam-se, à semelhança do observado na alínea 1.1, maiores dificuldades no ângulo de segmento e no ângulo ex-inscrito, como é o caso da resolução apresentada na figura 68.

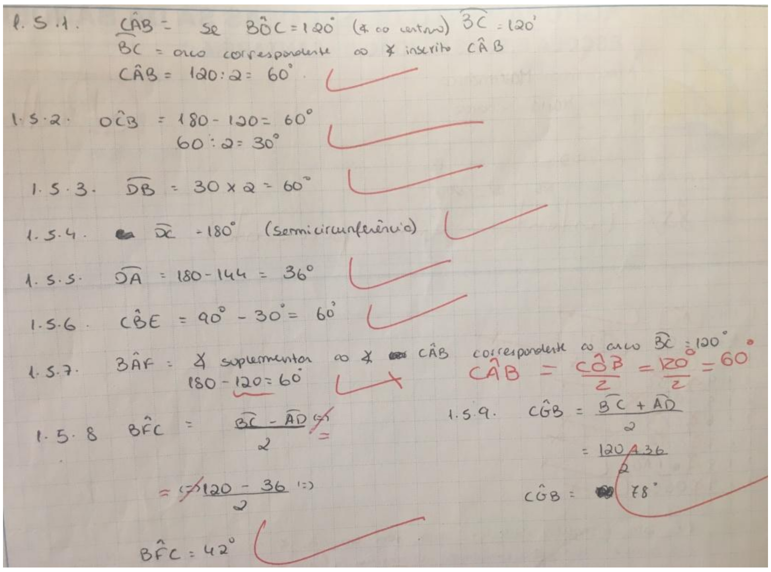

1.5.1. CÂB = Se BÔC = 120° (∢ ao centro) BC = 120°
BC = arco correspondente ao ∢ inscrito CÂB
CÂB = 120 : 2 = 60°
1.5.2. OĈB = 180 − 120 = 60°
60 : 2 = 30°
1.5.3. DB = 30 × 2 = 60°
1.5.4. DC = 180° (semicircunferência)
1.5.5. DA = 180 − 144 = 36°
1.5.6. CB̂E = 90° − 30° = 60°
1.5.7. BÂF = ∢ suplementar ao ∢ CÂB correspondente ao arco BC = 120°
180 − 120 = 60°
CÂB = CÔB/2 = 120/2 = 60
1.5.8 BF̂C = (BC − AD)/2 ⇔ = ⇔ (120 − 36)/2 ⇔
BF̂C = 42°
1.5.9. CĜB = (BC + AD)/2 = (120 + 36)/2
CĜB = 78°

Figura 68 – Resposta à alínea 1.5, essencialmente correta, usando na maioria as propriedades abordadas nas tarefas mas evidenciando dificuldades no ângulo ex-inscrito e confusão na utilização dos símbolos “⇔” e/ou “=” (versão 1)

Na alínea 1.6 das duas versões, a propósito do quadrilátero [ADBC] inscrito na circunferência, é solicitado aos alunos que verifiquem que os seus ângulos internos opostos são suplementares e que a sua soma é 360^0. Os alunos deveriam assim determinar as amplitudes desses ângulos e fazer as verificações requeridas numericamente, à semelhança do apresentado na figura 69.

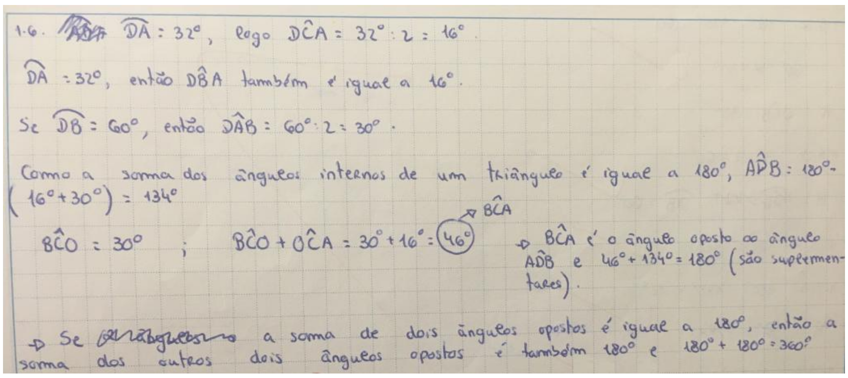

1.6. DA = 32°, logo DĈA = 32° : 2 = 16°.
DA = 32°, então DB̂A também é igual a 16°.
Se DB = 60°, então DÂB = 60° : 2 = 30°.
Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, AD̂B = 180° − (16° + 30°) = 134°
BĈO = 30° ; BĈO + OĈA = 30° + 16° = 46° BĈA
→ BĈA é o ângulo oposto ao ângulo AD̂B e 46° + 134° = 180° (são suplementares).
→ Se a soma de dois ângulos opostos é igual a 180°, então a soma dos outros dois ângulos opostos é também 180° e 180° + 180° = 360°

Figura 69 – Resposta correta (versão 2)

Nove alunos não apresentaram qualquer resposta, cinco alunos apresentaram respostas completamente fora do contexto e em sete casos observei respostas em que os alunos mostram que entenderam o objetivo da questão mas cometem erros na determinação dos ângulos, não numéricos mas relacionados com a aplicação das propriedades. Considerei estas respostas erradas pois a verificação não foi conseguida devido a erros em cálculos intermédios.

Na questão 2 das duas versões, a alínea 2.1 requer que os alunos justifiquem que o quadrilátero representado na figura é um trapézio isósceles. Os alunos deveriam justificar o facto de ser trapézio e também o facto de ser isósceles. Verifiquei que sete alunos não responderam e quatro alunos apresentaram respostas totalmente erradas, com afirmações totalmente irrelevantes no contexto. Considerei oito respostas incompletas, os alunos só justificam que o trapézio é isósceles por dois dos seus lados serem paralelos mas não justificam o motivo de ser isósceles, tal como no exemplo representado na figura 70.

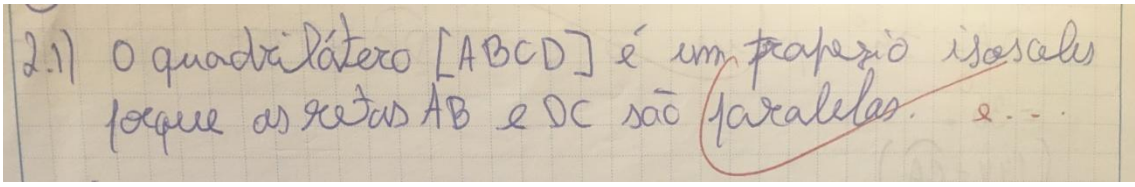
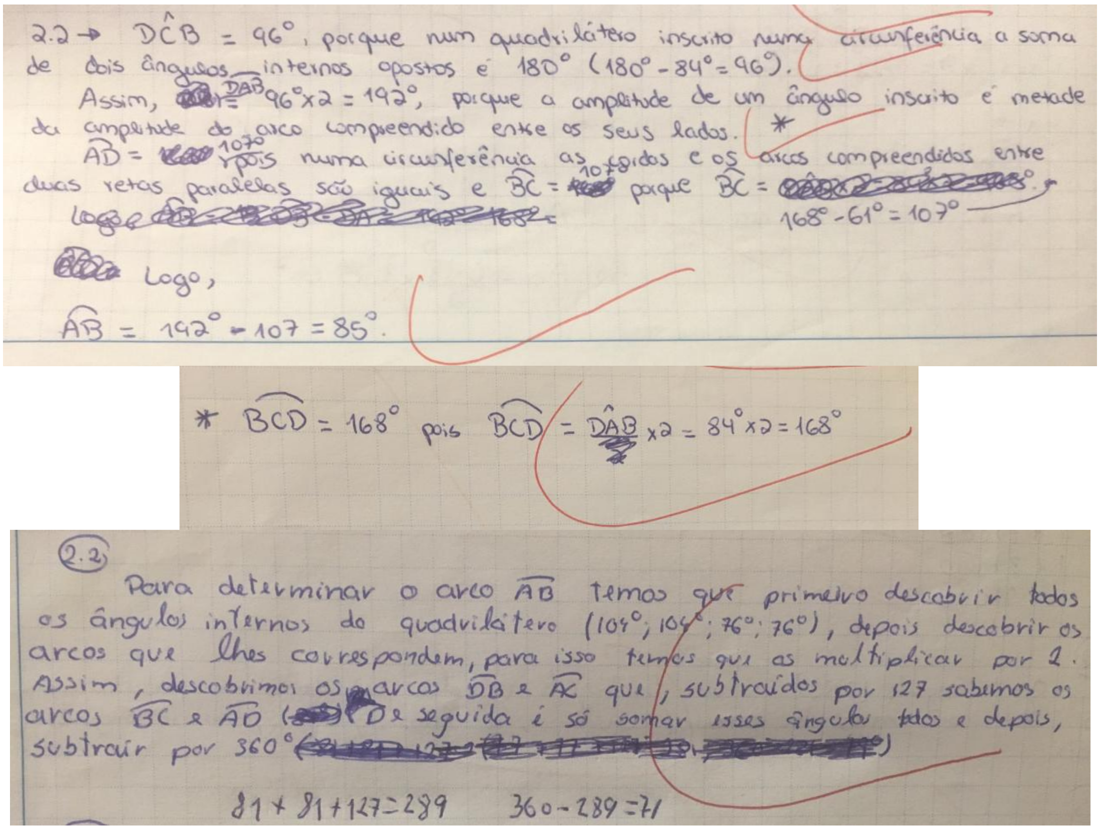


Figura 70 – Resposta correta com justificação incompleta (versão 1)

No entanto, registaram-se sete respostas com justificação completa, complementando o facto de o quadrilátero ter dois lados paralelos com a particularidade dos outros dois lados serem cordas compreendidas entre duas retas paralelas, sendo assim congruentes, apresentando desta forma o motivo para o trapézio ser isósceles.

Na alínea 2.2 é solicitado aos alunos que determinem a amplitude de um arco de circunferência, justificando os seus procedimentos. Observei que seis dos alunos não responderam, três apresentaram respostas totalmente erradas e descontextualizadas. Categorizei as restantes respostas em corretas (sete), corretas sem justificação (seis) e corretas com justificação incompleta (seis). Na figura 71 encontram-se duas resoluções corretas, a primeira da versão 1 com um à parte, (asterisco que a aluna colocou na página seguinte com o cálculo da amplitude do arco BCD), e outra da versão 2. Na primeira situação a aluna vai efetuando os cálculos à medida que apresenta as propriedades que os fundamentam. Na segunda situação o aluno explica todo o seu raciocínio e efetua os cálculos no final.


2.2 → $D\hat{C}B = 96°$, porque num quadrilátero inscrito numa circunferência a soma de dois ângulos internos opostos é 180° (180° − 84° = 96°).
Assim, $\overset{\frown}{DAB} = 96° \times 2 = 192°$, porque a amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados. *
$\overset{\frown}{AD} = 107°$ pois numa circunferência as cordas e os arcos compreendidos entre duas retas paralelas são iguais e $\overset{\frown}{BC} = 107°$ porque $\overset{\frown}{BC} = 168° - 61° = 107°$
Logo,
$\overset{\frown}{AB} = 192° - 107 = 85°$.

* $\overset{\frown}{BCD} = 168°$ pois $\overset{\frown}{BCD} = D\hat{A}B \times 2 = 84° \times 2 = 168°$

2.3
Para determinar o arco $\overset{\frown}{AB}$ temos que primeiro descobrir todos os ângulos internos do quadrilátero (104°; 104°; 76°; 76°), depois descobrir os arcos que lhes correspondem, para isso temos que os multiplicar por 2. Assim, descobrimos os arcos $\overset{\frown}{DB}$ e $\overset{\frown}{AC}$ que, subtraídos por 127 sabemos os arcos $\overset{\frown}{BC}$ e $\overset{\frown}{AD}$. De seguida é só somar esses ângulos todos e depois, subtrair por 360°
81 + 81 + 127 = 289   360 − 289 = 71

Figura 71 – Resposta correta (versão 1 e versão 2)

Na figura 72 encontra-se um exemplo de uma resposta com os cálculos corretos efetuados.

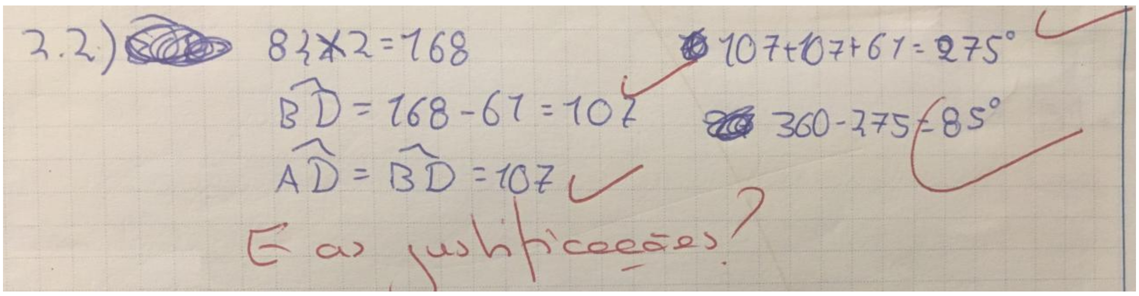

2.2) 84×2 = 168
$\overset{\frown}{BD} = 168 - 61 = 107$
$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD} = 107$
107+107+61 = 275°
360−275 = 85°
E as justificações?

Figura 72 – Resposta correta sem justificação (versão 1)

Na alínea 2.3, solicitava-se aos alunos que indicassem, justificando, os valores da soma dos ângulos internos (2.3.1) e da soma dos ângulos externos (2.3.2) de um polígono. Em ambas as versões o polígono encontra-se representado na figura do enunciado, diferindo apenas no número de lados, cinco na versão 1 e seis na versão 2. O objetivo era que os alunos mostrassem que conheciam as fórmulas para a obtenção destes valores, daí a indicação no enunciado de que não deveriam determinar a amplitude de todos os ângulos internos.

Analisando os resultados observados constata-se que: quatro alunos não responderam às alíneas em causa; quatro alunos na alínea 2.3.1 e dois na alínea 2.3.2 responderam erradamente apresentando um valor aparentemente ao acaso e sem qualquer justificação. No que respeita a respostas corretas, 13 alunos na primeira alínea e 20 na segunda apresentaram a resposta esperada, um aluno respondeu corretamente a ambas as alíneas, mas usando uma notação errada e/ou erro formal e quatro alunos apresentaram na alínea 2.3.1 uma resposta correta com justificação errada, acontecendo apenas esta situação a um aluno na alínea 2.3.2.

Balanço. Os resultados obtidos encontram-se sintetizados na tabelas 4, 5 e 6 que se seguem. Nos dados apresentados na tabela 4 observa-se que o número de classificações inferiores a 50% diminuiu em um aluno relativamente ao observado em média nas restantes seis fichas de avaliação realizadas pela turma ao longo do ano letivo. Não é uma melhoria significativa nem os resultados foram satisfatórios deste ponto de vista, porque considero que a expectativa de um professor quando prepara uma ficha de avaliação é que os alunos consigam usar os seus conhecimentos de forma a conseguirem obter sucesso.

Tabela 4 – Comparação entre os resultados obtidos na Ficha de Trabalho para Avaliação e os obtidos nas restantes fichas de avaliação em termos de sucesso

Sucesso	Ficha de Trabalho para Avaliação		Média nas restantes fichas	
	Nº	%	Nº	%
Com classificação inferior a 50%	9	32	10	36
Com classificação superior ou igual a 50%	19	68	18	64

Mas sabemos que muitos fatores intervêm nos resultados de uma avaliação a Matemática. Há alunos que não respondem muitas vezes devido às baixas expectativas em relação à avaliação da disciplina e alunos que vêm acumulando insucessos, que têm dificuldade em empenhar-se nas atividades da disciplina. No entanto, considero muito satisfatório que nas tarefas todos os alunos se tenham empenhado, participado entusiasmados e, ainda assim, obtido melhores resultados que em outras fichas de avaliação. Na tabela seguinte é feita uma análise em termos dos cinco níveis de desempenho, correspondendo cada uma a cada uma das cinco classificações qualitativa a atribuir na nossa escola em cada ficha de avaliação.

Tabela 5 - Comparação entre os resultados obtidos na Ficha de Trabalho para Avaliação e os obtidos nas restantes fichas de avaliação em termos das classificações observadas em cada nível de desempenho

Níveis de desempenho	Ficha de Trabalho para Avaliação			Em média nas restantes fichas		
	Nº de alunos	% de alunos	% média	Nº de alunos	% de alunos	% média
Muito Insuficiente ($< 20\%$)	3	11	16	4	14	10
Insuficiente ($\geq 20\%$ e $< 50\%$)	5	18	38	8	28	40
Suficiente ($\geq 50\%$ e $< 70\%$)	9	33	61	7	25	58
Bom ($\geq 70\%$ e $< 90\%$)	8	29	75	6	22	77
Muito Bom ($\geq 90\%$)	3	11	93	3	11	93

Quando a percentagem fica abaixo de 20% é atribuída a classificação “Muito Insuficiente”. Apesar da melhoria não ser significativa em número de alunos, a média dentro desta classificação foi 16%, a mais alta registada em todo o ano letivo e 6% acima da média registada nas restantes fichas. Este dado significa que apesar de se encontrarem longe do objetivo, evoluíram positivamente.

As classificações “Insuficiente” levam um professor a interrogar-se sobre o que correu menos bem. Esta classificação é atribuída a um aluno cuja percentagem no instrumento de avaliação se situa entre 20% e 50%. Nestas circunstâncias encontram-se cinco alunos e a sua média foi 38%, que não está acima da média registada ao longo do ano letivo. No entanto, encontra-se aqui um aluno que habitualmente obtinha resultados na categoria abaixo, que também evoluiu, empenhou-se significativamente e obteve a sua classificação mais alta de sempre na disciplina, acima de 40%, o que o entusiasmou e motivou para continuar a esforçar-se.

As classificações “Suficiente”, atribuídas quando a percentagem varia entre 50% e 70%, registaram-se em número semelhante ao habitual, mas a média também subiu, tomando o valor de 61%, o que considero uma evolução positiva. Registaram-se mais alunos e com uma média também superior à registada em média nas restantes fichas de avaliação. De facto, alguns alunos obtiveram percentagens perto dos 70% pela primeira vez, o que também os entusiasmou.

Quanto às classificações “Bom” correspondentes a classificações quantitativas acima dos 70% e abaixo dos 90%, o número registado também subiu ligeiramente e a média das classificações obtidas neste nível de desempenho foi 75%. Esta média encontra-se 2 pontos percentuais abaixo da média análoga das restantes fichas de avaliação, mas além de contar com mais dois alunos conta com um aluno que normalmente obtinha classificação duas categorias abaixo, ou seja, “Insuficiente”. Trata-se, claramente, de uma “vitória” para este aluno que se evidenciou nas aulas em que foram aplicadas as tarefas. Foi muito gratificante verificar que o seu esforço e empenho estava a produzir bons resultados.

As classificações “Muito bom”, atribuídas quando a percentagem atinge os 90%, equiparam-se em número e também em média (93%) ao registado habitualmente. Os alunos que as obtiveram também foram aqueles que as registam frequentemente. Ainda assim em termos de desempenho verificaram-se evoluções positivas, notei um maior cuidado e esforço em justificar convenientemente o trabalho apresentado.

Tabela 6 – Comparação entre os resultados obtidos na Ficha de Trabalho para Avaliação e os obtidos nas restantes fichas de avaliação em termos das classificações máxima, mínima e média

Máximo, mínimo e média	Ficha de Trabalho para Avaliação	Em média nas restantes fichas
Classificação máxima (%)	95	96
Classificação mínima (%)	10	8
Média das classificações (%)	59	56

Em termos gerais, as dificuldades manifestaram-se essencialmente ao nível das justificações. Esta Ficha de Trabalho para Avaliação continha um número superior de questões a exigir dos alunos esta competência comparativamente ao incluído nas restantes fichas de avaliação. O trabalho desenvolvido foi muito incidente neste aspeto e considerei muito pertinente inclui-lo, dado que no desenvolvimento das tarefas e em particular nas discussões coletivas insisti muito com os alunos nesta finalidade até porque das dezasseis propriedades que constam dos descritores do capítulo (ver tabela 1) se pretende que os alunos provem/demonstrem dez delas. Constatei que alguns alunos ainda não interiorizaram ou compreenderam a necessidade e a pertinência de cumprir a indicação de justificar. Também destaco como uma dificuldade os erros de natureza formal e também os de cálculo (menos frequentes). De acordo com os critérios de classificação das provas finais de ciclo há questões em que os alunos podem ser penalizados até dois pontos percentuais, o que no cômputo final da prova pode fazer toda a diferença. Chamo sistematicamente a atenção para os erros que ocorrem, mas continuam a verificar-se, pelo que é um esforço que deve ser continuado e reforçado.

Por outro lado, também é ao nível das justificações que destaco a evolução mais significativa. Muitos alunos revelaram um esforço em apresentá-las, uns descrevendo primeiro o processo e efetuando os cálculos no final, outros fazendo os cálculos e apresentando as propriedades em paralelo. Alguns alunos tentaram justificar, mas não o conseguiram com total correção, essencialmente por deixarem a justificação incompleta ou por a iniciarem corretamente (por vezes até apresentando corretamente o processo que pretendem utilizar) mas não a conseguindo concretizar.

Após ter classificado as Fichas de Trabalho para Avaliação devolvi-as aos alunos e, à semelhança do que é comum fazermos em relação às fichas de avaliação, cada aluno observa e analisa os meus comentários e procede à sua resolução apoiada. Trata-se de uma resolução apoiada porque incentivo a consulta do manual, do caderno diário, neste caso também do resumo teórico que foi elaborado em simultâneo com a resolução das tarefas, e esclareço individualmente e/ou em grupo todas as dúvidas de acordo com a especificidade da questão colocada. Com este processo de correção os alunos são confrontados com o que correu menos bem, completando o que não está completo e fazendo pequenas retificações quando é o caso, sempre a partir do trabalho realizado por si.

Capítulo VI

Conclusão

Este capítulo encontra-se dividido em três seções. Na primeira apresento a síntese do estudo. Na segunda exponho sucintamente as conclusões deste estudo tendo em conta o objetivo e as questões formuladas. Na terceira faço um balanço do estudo apresentando as principais dificuldades e os erros mais relevantes, as implicações para o ensino e aprendizagem da Geometria quando se recorre a tarefas de construção, exploração e investigação e indico as implicações que este estudo tem para a minha prática profissional futura e, em termos mais gerais, para o ensino da Geometria.

6.1. Síntese do estudo

O objetivo desta investigação é compreender como é que os alunos desenvolvem o seu raciocínio geométrico quando recorrem ao ambiente de geometria dinâmica *GeoGebra* para resolver tarefas de construção, exploração e investigação. O propósito geral do estudo é melhorar a aprendizagem da disciplina de Matemática, tentando ir de encontro às dificuldades dos alunos e contribuir para que as superem, ou melhor ainda, contribuir para as evitar. Melhorando as aprendizagens os alunos, melhora também a visão que estes têm da disciplina, passam a acreditar mais nas suas capacidades, a confiar em si mesmos e, consequentemente, a desenvolver mais e melhor trabalho. Inverte-se assim o ciclo de negativismo associado à Matemática.

No quadro teórico refiro em que consistem os chamados AGD, ambientes de geometria dinâmica, e em que medida podem ser usados para melhorar o ensino e a aprendizagem da Matemática, mais especificamente da Geometria. Abordo ainda os processos de raciocínio em geral e geométrico em particular, com especial atenção à generalização e à justificação por parte dos alunos.

A intervenção realizada neste estudo foi feita no tema “Circunferência”, que consta do currículo do 9.º ano, e segue uma metodologia qualitativa e interpretativa, com observação participante. Consistiu na aplicação de tarefas exploratórias e de investigação, trabalhadas num ambiente de ensino-aprendizagem exploratório, tendo sido realizados alguns momentos de discussão coletiva. A intervenção culminou com a realização de uma ficha de trabalho para avaliação unicamente sobre o tema em estudo.

A recolha de dados foi efetuada numa turma a que leciono Matemática, como docente titular e única, sendo objeto da investigação o desempenho de toda a turma, durante toda a unidade de ensino. Na recolha de dados foram utilizados a observação de aulas, com registos em diário de bordo e em gravações áudio, e a recolha documental das produções dos alunos em suporte papel e também em suporte informático. Em cada tarefa os alunos respondiam em enunciado próprio em papel, enquanto desenvolviam o seu trabalho com o *software GeoGebra* e registavam regularmente as capturas de ecrã em ficheiros *Word*, podendo assim observar-se também a evolução da tarefa no computador. A acompanhar o desenvolvimento das tarefas, os alunos também construíram um resumo teórico das definições abordadas e das propriedades deduzidas, o qual, no final se apresentou como um importante meio de consulta dos conteúdos que constam da unidade de ensino.

Depois de formalizadas as generalizações era tempo de justificar. Para este efeito, frequentemente era necessário recorrer a propriedades e definições já conhecidos. Na busca de argumentos válidos para justificar, o raciocínio geométrico foi desenvolvido na medida em que os alunos articulam novos saberes com outros já conhecidos.

Os resultados indicam que os alunos, com tarefas de carácter exploratório e investigativo, num ambiente em que se analisam as figuras obtidas com o ambiente de geometria dinâmica *GeoGebra* e se discutem ideias, formulam conjeturas e produzem generalizações com alguma facilidade. Também conseguem justificar as suas generalizações recorrendo a métodos descritivos ou mais formais desenvolvendo as suas competências nestas áreas. Os alunos induziram e justificaram todas as propriedades previstas nos descritores do programa em vigor, em vez de simplesmente as memorizarem e aplicarem na resolução de exercícios.

6.2. Conclusão do estudo

Nesta secção, pretendo dar resposta às questões deste estudo apresentadas no capítulo introdutório, tendo em conta o suporte teórico e a análise efetuada sobre os dados recolhidos.

6.2.1. Questão 1 – Estratégias dos alunos para resolver as tarefas

Todas as tarefas, com exceção da Tarefa 5, se iniciavam revendo definições ou introduzindo definições novas, necessárias à consecução dessa tarefa. Ao longo do desenvolvimento das tarefas os alunos foram construindo o seu próprio resumo teórico onde iam registando, aula a aula, as definições novas e as propriedades generalizadas e justificadas. A estrutura desse resumo teórico foi fornecida por mim aos alunos (Figura 2) como documento *Word*, que iam assim construindo uma espécie de glossário para consulta, estudo e consolidação de conhecimentos.

Em todas as tarefas de construção em que foi utilizado o programa *GeoGebra*, a expectativa e o entusiasmo de ir trabalhar aquele *software* faziam com que os alunos estivessem concentrados e atentos na fase inicial da aula apesar desta ter então um caráter mais expositivo. Os alunos viam esta fase da aula como uma preparação para o trabalho que deveriam desenvolver com o computador portátil, mostrando-se atentos e interessados. Desde o início de cada construção os alunos mostraram-se empenhados e motivados, procurando seguir o guião das construções geométricas. Nestas tarefas era sugerido aos alunos que fizessem variar alguns elementos essenciais das figuras, como o vértice do ângulo, o raio da circunferência ou os pontos que definem arcos e/ou cordas, mas conservando algumas caraterísticas comuns.

Feitas estas variações os alunos registavam em tabelas os dados relativos às construções. Os registos permitiam-lhes assim tomar consciência de que havia propriedades invariantes nas figuras, ou seja, que independentemente dos pontos que selecionassem à partida, essas propriedades iam sempre verificar-se e começaram a encontrar regularidades e a formalizar generalizações. O registo dos dados nas tabelas era sugerido no próprio enunciado da tarefa.

Na tarefa 1 os alunos perceberam, a partir das suas construções, que as variáveis em causa eram o raio da circunferência e a amplitude do ângulo ao centro. Verifiquei isso ao constatar que os alunos alteravam as suas construções fazendo variar os valores de ambas as variáveis em simultâneo e uma a uma em separado. Foi assim que se aperceberam que, para todos os valores da amplitude do ângulo ao centro, mudando o raio ou não, os quocientes entre o perímetro da circunferência e o comprimento do arco e entre a área do círculo e a área do setor circular tomavam o mesmo valor. Esta ilação permitiu-lhes concluir que o raio não interferia. Assim os alunos concentraram-se em explorar a amplitude do ângulo ao centro. Com esta exploração verificaram que à medida que a amplitude do ângulo se aproximava de 360^0 o valor dos quocientes se aproximava de 1. Então, experimentaram se, para todas as suas construções, o valor dos quocientes coincidia com o quociente entre a amplitude do ângulo giro e a amplitude do ângulo ao centro e confirmaram que a conjetura era válida em todos os casos de cada par.

No entanto, logo na tarefa 2, alguns dos pares de alunos consideraram que não precisavam explorar mais casos, ficando satisfeitos com os casos observados, na sua maioria dois, um em que alteravam o comprimento do raio da circunferência e mantinham o comprimento das cordas iguais, e outro mantendo o comprimento do raio e alterando o comprimento das cordas iguais. Com estes exemplos todos os pares conjeturaram que os ângulos ao centro eram iguais bem como os comprimentos dos arcos correspondentes às cordas iguais e então não sentiram necessidade de explorar mais situações.

Na Tarefa 3, havia três situações a explorar. O facto da reta tangente formar com o raio que contém o ponto de tangência um ângulo reto é parte integrante da própria definição de reta tangente a uma circunferência. Neste caso os alunos construíram, mediram o ângulo e verificaram que se tratava de facto de um ângulo reto. Nas outras duas situações construíram os elementos solicitados e, para o registo de dados, já conscientes da necessidade de obter o maior número de casos possíveis e de excluir ao máximo a existência de um contraexemplo, os alunos efetuaram os cinco registos e exploraram situações diferentes. Na situação em que deveriam conjeturar sobre os comprimentos das cordas cujos extremos se encontram nos pontos de interseção de duas retas paralelas e secantes a uma circunferência e também sobre os comprimentos dos arcos correspondentes a essas cordas, os pares de alunos exploraram situações variadas, quando as cordas e as retas paralelas definem um trapézio e também quando as cordas se cruzam, sobrepondo-se parte dos arcos correspondentes. Explorando situações em que as cordas se cruzam e em que não se cruzam abarcaram todas as situações possíveis. Na última situação a explorar que consistia em procurar relações entre os comprimentos dos dois segmentos de reta em que a perpendicular a uma corda, que passa pelo centro da circunferência, divide essa corda, os alunos mostraram bastante cuidado na apresentação da construção e em identificar devidamente os elementos a ter em causa. Para os seus registos escolheram situações em que a corda é um diâmetro, ou simplesmente uma corda, deslocando a corda ao longo da perpendicular.

Na tarefa 4, na procura de relações entre a amplitude do ângulo inscrito e a amplitude do arco compreendido entre os seus lados, para fazer a conjetura, os alunos fizeram variar todas as variáveis em causa que pudessem eventualmente ter influência, ou seja, o raio da circunferência, a amplitude do ângulo inscrito e o vértice do ângulo inscrito. Ainda assim a amplitude do arco compreendido entre os lados de um ângulo inscrito mantinha-se o dobro da amplitude do ângulo inscrito. Enquanto movimentavam o vértice do ângulo inscrito sobre a circunferência, os alunos observaram que a amplitude do ângulo se mantinha, pelo que conjeturaram que todos os ângulos inscritos correspondentes ao mesmo arco têm a mesma amplitude. No caso do ângulo raso, os alunos compreenderam-no como um caso particular da propriedade anterior. Respondendo ao apelo de obter um ângulo raso recorrendo a transformações geométricas os alunos recorreram à reflexão central e à translação, numa estratégia de tentativa erro até conseguirem atingir o objetivo.

A tarefa 5 tinha uma estrutura diferente. Os alunos poderiam optar por trabalhar apenas com os exemplos representados nas figuras ou usar aplicações

GeoGebra. Os alunos sentiram segurança nas suas conjeturas e não manifestaram interesse em trabalhar com aplicações previamente criadas por mim para induzir e demonstrar as propriedades. Conjeturaram assim que a amplitude de um ângulo de segmento é igual a metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados e que a amplitude de um ângulo ex-inscrito é igual à semissoma das amplitudes dos arcos correspondentes às cordas que as retas suporte dos lados do ângulo contêm.

Na tarefa 6, os alunos também fizeram as suas construções, nomeadamente da circunferência e de um ângulo com vértice no interior do círculo e de outro ângulo com vértice no exterior do círculo. Analisando os seus próprios registos nas tabelas, a partir das várias simulações efetuadas, os alunos concluíram as propriedades sobre estes ângulos – isto é, a amplitude de um ângulo com vértice no interior de um círculo é igual a metade da soma das amplitudes dos arcos compreendidos entre os lados do ângulo e os lados do ângulo verticalmente oposto, e a amplitude de um ângulo com vértice exterior a um círculo, e cujos lados o intersetam, é igual a metade da diferença entre as amplitudes dos arcos, maior e menor, compreendidos entre os seus lados.

A tarefa 7, para além de promover a familiarização dos alunos com o cálculo das somas das amplitudes dos ângulos internos e internos de um polígono, incentiva à demostração das fórmulas para a obtenção destas somas, já conhecidas. Neste caso, a par de explorar vários casos particulares com o *software GeoGebra*, os alunos tiveram de trabalhar do fim para o princípio e, de certa forma, também desdobrar um problema complexo em questões mais simples, quando se considera que qualquer polígono se encontra dividido em triângulos com determinadas caraterísticas.

Sistematizando, com exceção da tarefa 5, em que foi utilizada a estratégia de tentativa e erro, nas restantes tarefas a estratégia utilizada foi a exploração de casos particulares, recorrendo frequentemente a tabelas, para registo dos dados obtidos nos casos particulares, procurando descobrir uma regularidade. As estratégias que os alunos usaram na resolução das tarefas propostas para generalização foi sobretudo a de analisar os invariantes num grande número de casos que obedeciam às condições dadas e, nas tarefas propostas para justificação, recorrer a propriedades matemáticas e cálculos algébricos.

6.2.2. Questão 2 – Generalizações construídas pelos alunos

O *GeoGebra* é uma ferramenta em que a construção de objetos e configurações geométricas são feitos a partir das propriedades que os definem. Através de deslocamentos aplicados aos elementos que compõem a figura, esta transforma-se, mantendo as relações geométricas que caracterizam a situação. Assim, para um dado objeto ou propriedade, temos associada uma coleção de "figuras em movimento", e os invariantes que aí aparecem correspondem a propriedades geométricas intrínsecas ao problema.

Assim, na Tarefa 1, os alunos constataram a igualdade dos quocientes entre o perímetro do círculo e o comprimento do arco, entre a área do círculo e a área do setor circular e entre a amplitude do ângulo giro e a amplitude do ângulo ao centro, a partir da visualização das construções que efetuaram e dos resultados dos cálculos registados na tabela. Os alunos conjeturaram e generalizaram seguindo precisamente este ciclo de raciocínio abdutivo e indutivo, no âmbito da discussão coletiva.

Nas Tarefas 2, 3 e 4, a primeira conjetura rapidamente se transformou em generalização e os alunos apresentaram, em cada uma das tarefas, essas generalizações em linguagem corrente, sem recorrer a qualquer simbologia matemática.

A Tarefa 5 tinha a particularidade de conter, para cada situação, dois exemplos acompanhados de figuras, sem a indicação de construção de figuras. Deixei ao critério dos alunos a utilização do *software*. Como que convencidos por aquelas duas figuras e identificando-as com o ambiente *GeoGebra*, parece que os alunos tinham interiorizado que, em qualquer construção que fizessem, o padrão ir-se-ia manter e lançaram uma conjetura.

Na Tarefa 6, os alunos voltaram às construções, às movimentações de elementos-chave sobre as construções, ao registo de valores em tabela e à apresentação das conjeturas e generalizações. Mais uma vez, fizeram uma descrição em linguagem corrente do que induziram sem recorrer a linguagem matemática.

Na Tarefa 7, os alunos voltaram a trabalhar com fórmulas matemáticas, sendo necessário recorrer a procedimentos algébricos. Nesta questão foi essencial a construção no *GeoGebra* e a consequente visualização concreta da situação em causa.

Só manipulando os vários vértices do quadrilátero, os alunos puderam constatar a regularidade em causa e conjeturar. Se não tivessem tido essa oportunidade não teriam conseguido generalizar. De novo, foi imperioso criar um ambiente de discussão coletiva para explorar os raciocínios empreendidos pelos alunos no sentido de os ajudar a obter as generalizações.

Analisando as tarefas como um todo, verifica-se que a visualização de várias situações com características comuns usando o ambiente de geometria dinâmica *GeoGebra* é um apoio importante para que o processo conjetura/generalização decorra de forma eficiente. A dada altura, alguns alunos desenvolveram bastante confiança nas suas primeiras conjeturas, o que os levou a fazer menos movimentações e menos registos do que os solicitados. Isso aconteceu na Tarefa 5, nas propriedades que dizem respeito ao ângulo de segmento e ao ângulo ex-inscrito, e foi precisamente nestes conteúdos que os alunos revelaram um desempenho mais fraco na Ficha de trabalho para Avaliação. É ainda de notar que, na Tarefa 7, os alunos mostraram-se incapazes de conjeturar sem as construções, o que evidencia a importância da visualização dinâmica para o processo de aprendizagem.

6.2.3. Justificações matemáticas realizadas pelos alunos

Depois de surgir a generalização, o desafio é justificá-la, entender o porquê daquela propriedade apresentando uma argumentação válida. Na Tarefa 1, os alunos conjeturaram, generalizando, e demonstraram as fórmulas de cálculo do comprimento de um arco de circunferência e da área de um setor circular. Esta demonstração foi feita com base na proporcionalidade direta entre a amplitude de um arco de circunferência e o seu comprimento, recorrendo depois a procedimentos algébricos/aritméticos. Os alunos verificaram ainda a forma como o comprimento de um arco e a área do setor circular que lhe corresponde se relacionam, neste caso por comparação das expressões anteriormente obtidas, recorrendo a procedimentos puramente algébricos, por comparação das duas fórmulas obtidas imediatamente antes. Tratou-se também de uma demonstração (Balacheff, 1988).

Nas tarefas 2, 3 e 4, os alunos também conjeturaram, generalizaram e justificaram. Para justificar as suas generalizações usaram, por minha sugestão ou sugestão dos colegas no contexto de discussão coletiva, conhecimentos previamente adquiridos em anos letivos anteriores. Procurando encontrar argumentos válidos e propriedades úteis em cada contexto específico, entraram na discussão: a igualdade de triângulos; a definição de amplitude de um arco; a classificação de quadriláteros; a semelhança de triângulos; o facto de a ângulos ao centro congruentes corresponderem arcos e cordas congruentes, e vice-versa; as caraterísticas de um triângulo isósceles; o facto de a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo ser a amplitude de um ângulo raso. Selecionada e analisada a informação, os alunos selecionaram a que consideravam relevante e produziram justificações das generalizações encontradas.

A Tarefa 5 continha, para cada uma das duas questões, dois casos particulares. Os alunos encontraram caraterísticas comuns nos dois casos e daqui saiu uma conjetura que se apressaram a justificar. Apesar do programa *GeoGebra* ter sido colocado à disposição dos alunos e de eu lhes ter disponibilizado aplicações do programa em que poderiam explorar mais casos, os alunos foram unânimes em considerar que aqueles dois casos eram suficientes e seguiram para a fase seguinte. Partindo de duas propriedades geométricas diferentes, os alunos fizeram as suas demonstrações recorrendo a regras de cálculo algébrico. Outros descreveram em linguagem corrente todos os procedimentos, apresentando uma justificação com caraterísticas de composição matemática. Pelo facto dos conteúdos envolvidos serem de caráter geométrico e algébrico, estes alunos justificaram devidamente as propriedades em causa.

No âmbito da Tarefa 6, os alunos voltaram a construir os seus próprios casos no *GeoGebra*. Foi nesta tarefa que constatei que a necessidade de justificar ou demonstrar estava a ficar interiorizada. Pela primeira vez nesta unidade de ensino, alguns pares de alunos "fundiram" a generalização com a justificação. Isto é, cientes da necessidade de justificar, enquanto descreviam a sua generalização, iam justificando em simultâneo o motivo pelo qual essa justificação era válida, recorrendo a propriedades geométricas já estudadas ou recordadas e a procedimentos algébricos.

Na questão 1 da Tarefa 7, não houve necessidade de conjeturar nem de generalizar. O objetivo era demonstrar propriedades já conhecidas com as quais os alunos se familiarizaram no início da tarefa. Neste caso, também partindo de propriedades geométricas, os alunos usaram cálculo algébrico. De acordo com as caraterísticas desta atividade matemática, considero que os alunos obtiveram demonstrações. Na questão 2 desta tarefa era solicitada uma generalização e uma justificação. A construção de um quadrilátero inscrito numa circunferência era dada aos alunos como uma opção, não como uma indicação a seguir. No entanto, sem recorrer a uma figura para observar e analisar, os alunos não conseguiram formular uma conjetura. A visualização espacial revelou-se crucial, uma vez que, sem a representação mental da imagem e das circunstâncias geométricas em causa, nenhum aluno conseguiu avançar com uma primeira conjetura. No entanto, assim que os alunos começaram a trabalhar com o *GeoGebra* e avançaram para a construção, podendo assinalar dois ângulos internos opostos do quadrilátero inscrito na circunferência, conjeturaram e generalizaram. Os alunos apresentaram justificações articulando saberes geométricos com saberes algébricos.

Encontrado o caminho para a justificação havia que a formalizar. De uma forma mais ou menos autónoma, incentivados em contexto de discussão coletiva ou com um acompanhamento mais individualizado, os alunos recorrem a desenvolvimentos algébricos ou a composições matemáticas para apresentar os raciocínios utilizados para justificar as suas generalizações.

De um modo geral, os alunos revelam mais facilidade na apresentação de justificações descritivas onde expõem sequencialmente os resultados nos quais se estão a basear para concluir o solicitado. No entanto, é comum algumas justificações se apresentarem incompletas, onde, em vez de justificarem o porquê de uma determinada situação, os alunos apenas expõem a situação. A título de exemplo, relembro que na questão 1.2 da Ficha de Trabalho para Avaliação, onde era pedida a classificação de um triângulo quanto aos lados e a justificação da resposta, surgiram respostas como "o triângulo é isósceles porque tem dois lados iguais", quando se esperava que justificassem o porquê daquele triângulo ter dois lados iguais. Neste caso específico enquadrei esta resposta na categoria "Resposta correta com justificação incompleta", pois o aluno não apresenta o motivo pelo qual deduziu que o triângulo era isósceles, limitando-se a mostrar que sabe as características de um triângulo isósceles.

Quando é requerida uma demonstração algébrica os alunos revelam mais dificuldades cometendo erros que, por vezes, os impedem de atingir o objetivo pretendido. As operações com monómios e polinómios, lecionadas no 8.º ano, são um tema em que os alunos revelam frequentemente muitas dificuldades, dada a capacidade de abstração que exigem e que muitos alunos ainda não desenvolveram na ocasião em que surge no programa. Neste sentido funcionam melhor as demonstrações em que o aluno sabe a expressão que deve obter no final, pois esta funciona como controlo do erro. Ainda assim há alunos que, a todo o custo, tentam deduzir a expressão e, ainda que consigam atingir o objetivo no final, cometem erros nos desenvolvimentos algébricos intermédios.

6.3. Balanço do estudo

Considerando as várias fases da resolução das tarefas no âmbito deste estudo, nomeadamente construção, conjetura, generalização, justificação e demonstração, é relevante destacar que:

1. Na construção, os alunos não revelaram dificuldades, notando-se inclusivamente um aumento da atenção ao pormenor nas construções à medida que se foi evoluindo ao longo da unidade de ensino. Constaram-se melhoramentos ao nível estético e mais preocupação em produzir uma imagem fácil de consultar e interpretar. Nesta fase, os erros prenderam-se maioritariamente com questões técnicas do programa *GeoGebra* (muito raramente) ou com problemas na interpretação dos enunciados.

2. Na conjetura e a generalização observaram-se poucas dificuldades, dado que a grande variedade de casos que o *GeoGebra* permite construir e analisar, bem como o registo de dados, facilitam a identificação de regularidades. Em algumas tarefas, os alunos mostraram alguma relutância em obter e registar na tabela os dados relativos a todos os casos solicitados, mas esta tendência foi diminuindo ao longo da unidade de ensino.

3. A fase de justificação foi aquela em que se observaram algumas dificuldades, das quais saliento: (i) a resolução de equações literais com várias variáveis; (ii) a omissão de passos intermédios por parte dos alunos no desenvolvimento de uma

expressão algébrica, pois não sabiam como realizar as operações com monómios e polinómios (em particular, não desembaraçar de denominadores antes de qualquer outra operação, não respeitar a prioridade das operações, esquecer-se que um sinal negativo antes de um traço de fração transforma cada parcela do numerador no seu simétrico); (iii) os erros de caráter formal, omitindo simbologia matemática ou usando-a indevidamente, tanto ao nível da Geometria como dos procedimentos algébricos; e (iv) a concentração em exemplos concretos, nas primeiras tarefas, assumindo que esses exemplos poderiam servir de justificação. Os erros e dificuldades detetados ao longo do desenvolvimento da unidade de ensino foram sendo trabalhados no sentido de serem ultrapassados. Sempre que julguei necessário e oportuno chamei à atenção para os erros e omissões no desenvolvimento das expressões ou sugeri a forma de ultrapassar a dificuldade.

A realização das tarefas propostas neste estudo, conjuntamente com os recursos tecnológicos usados, permitiu criar condições para que os alunos conjeturassem, generalizassem e justificassem e, em certos casos, demonstrassem as suas generalizações. Estas generalizações são propriedades geométricas sobre a circunferência e os vários tipos de ângulos que se podem construir em relação com a circunferência. As construções exploratórias sugeridas no enunciado das tarefas permitiram aos alunos identificar regularidades e essas regularidades sugeriram conjeturas, ou seja, afirmações sobre as propriedades observadas.

As construções de cada par eram únicas e diferentes das de todos os outros pares, mantendo apenas algumas características comuns e este facto confere poder a quem as constrói e confere possibilidade de relacionar com os conhecimentos prévios de Geometria. A visualização, em conjunto com a intuição, com este poder permitem que se formulem conjeturas com facilidade.

Utilizando processos de raciocínio abdutivo e indutivo, ou seja, fazendo generalizações, surge a necessidade de verificar a veracidade dos dados, justificando os resultados obtidos. As dificuldades que se evidenciaram neste processo incluem alguma relutância em procurar argumentos. A grande variedade de exemplos observados dentro da turma era considerada por alguns alunos como garantia de que a propriedade se verificava em quaisquer circunstâncias. Foi necessário fazer entender aos alunos que, por muitos casos que fossem explorados, era impossível explorá-los todos e que, portanto, tínhamos de procurar verdades matemáticas que confirmassem a veracidade da teoria, ou contraexemplos que permitissem excluí-la. Por mais que uma conjetura nos pareça verdadeira ao verificarmos muitos casos possíveis nas mesmas condições, nem sempre isso se verificará. Na verdade, após algum esforço e encaminhamento da professora os alunos conseguiram encontrar contraexemplos para refutar conjeturas que pareciam ser verdadeiras. Como a prática de justificação surgia nas tarefas de forma recorrente, os alunos foram-se familiarizando com ela e desenvolvendo competência no sentido de identificar mais rapidamente o conjunto de propriedades que estariam relacionadas e que poderiam ser úteis na demonstração.

O ambiente de geometria dinâmica *GeoGebra* permitiu que os alunos desenvolvessem o seu raciocínio geométrico na medida em que os ajudou a formalizar conjeturas e a generalizar, usando raciocínio indutivo. A partir da grande quantidade de construções com caraterísticas comuns, os alunos puderam generalizar. Assim, usando propriedades matemáticas e definições já conhecidas, como as caraterísticas da circunferência (área e perímetro), propriedades dos vários tipos de ângulos, classificação de ângulos, triângulos e quadriláteros, critérios de igualdade e de semelhança de triângulos, Teorema de Tales e Teorema de Pitágoras, os alunos articulam novos saberes com outros já conhecidos. Na busca de argumentos válidos para justificar, o raciocínio geométrico foi desenvolvido na medida em que aplicando raciocínio dedutivo, os alunos justificaram as suas generalizações, às vezes autonomamente, outras vezes na discussão coletiva.

Durante o desenvolvimento das tarefas que preparei para lecionar a unidade de ensino Circunferência, os alunos manifestavam-se entusiasmados e interessados em realizar aprendizagens recorrendo a este *software*. Antes do início da intervenção os alunos só conheciam o *software* de me verem manuseá-lo em anos letivos anteriores durante a lecionação de alguns temas. Passaram agora a ter oportunidade de o fazer pessoalmente na aula de Matemática. Isso foi como a concretização de um sonho. E este entusiasmo com que trabalharam e se integraram nas discussões coletivas foi, com toda a certeza, facilitador e promovedor de boas aprendizagens bem como no desenvolvimento de trabalho autónomo por parte dos alunos.

Sei pela minha experiência que um professor de Matemática está sempre atento à planificação a verificar se está a cumprir o estipulado no início do ano letivo.

Inicialmente, pode parecer que se está a "perder tempo", tive essa sensação nas duas primeiras tarefas, mas depois isso foi compensado com a qualidade das aprendizagens e com a fluidez da aula. Além disso, os alunos desenvolvem rapidamente muita facilidade nas construções e alguns até reaproveitam construções já utilizadas nas tarefas anteriores, retirando os elementos em excesso e colocando o que falta e, assim com o avançar nas tarefas, o tempo de construção diminui significativamente. Na planificação elaborada em grupo (Anexo III) estavam previstos 17 tempos letivos de 45 minutos, para a intervenção previ 23 tempos (Tabela 1) e consegui realizar a intervenção em 21 tempos, incluindo a entrega e correção da Ficha de Trabalho para Avaliação. Considero importante continuar com este tipo de trabalho, em que a resolução de problemas ganhe destaque, pois permite ao professor ter um melhor conhecimento das dificuldades dos alunos e dos raciocínios envolvidos.

Considero que dei um passo importante na melhoria da minha prática letiva, criei um ambiente de trabalho na sala de aula propício à compreensão dos conceitos e à aquisição de conhecimentos. O facto de os alunos se entusiasmarem com esse ambiente, contribuiu para que eu pudesse ter um conhecimento mais real das suas dificuldades e dos raciocínios envolvidos.

Tenho, portanto, em projeto desenvolver tarefas análogas a estas para outros temas da Geometria a abordar neste ano de escolaridade e nos restantes do 3.º ciclo. Os colegas que venham a lecionar este tema no futuro também podem encarar estas tarefas como uma base de trabalho, a adaptar à realidade das suas turmas e da sua escola. Este estudo mostra como se podem rentabilizar os recursos tecnológicos ao nosso dispor, entre os quais os ambientes de geometria dinâmica, e em particular o *software GeoGebra*, para interessar os alunos pelo estudo da Geometria e promover as suas aprendizagens.

Referências

Abrantes, P., Serrazina, L. & Oliveira, I. (1999). A Matemática na educação básica. Lisboa: Ministério da Educação. (Retirado de https://www.researchgate.net/profile/ Lurdes_Serrazina/publication/263807597_A_Matematica_na_Educacao_Basica /links/02e7e53bebc6fbc1a6000000/A-Matematica-na-Educacao-Basica.pdf?origin=publication_detail em 12/set./2018).

Balacheff, N. (1988). Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège. Tese de Doutoramento. Institut National Polytechnique de Grenoble – INPG. Université Joseph-Fourier - Grenoble I.

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. Lester (Ed.), Second handbook of mathematics teaching and learning (pp. 843-909). Greenwich, CT: Information Age.

Blanton, M. (2008). Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, transforming practice. Portsmouth, NH: Heinemann.

Boavida, A. M. (2001). Um olhar sobre o ensino da demonstração em Matemática. Educação e Matemática, 63, 11-15.

Boavida, A. M. (2008). Raciocinar para aprender e aprender a raciocinar. Educação e Matemática, 100, 1.

Boavida, A. M. & Menezes, L. (2012). Ensinar Matemática desenvolvendo as capacidades de resolver problemas, comunicar e raciocinar: contornos e desafios. In Associação de Professores de Matemática (Ed.), Atas do XXIII Seminário de Investigação em Educação Matemática (pp. 287-295). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (1994). Investigação qualitativa em educação. Porto: Porto Editora.

Brocardo, J. (2014). Tarefas matemáticas. In Investigação em Educação Matemática 2014 Tarefas Matemáticas (p. 3-4). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

Buzan, T. (2007). A criança inteligente. Lisboa: Oficina do Livro.

Camargo, A., Lindemeyer, C., Irber, C. & Ramos, M. (2011). *A pergunta na sala de aula: concepções e ações de professores de Ciências e Matemática*. [Consult. 9.Out.2018]. Disponível em: http://abrapecnet.org.br/atas_enpec/viiienpec/resumos/R1263-3.pdf

Cengiz, N., Kline, K., & Grant, T. (2011). Extending students'mathematical thinking during whole-group discussions. Journal of Mathematics Teacher Education, 14, 355–377.

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 420-464). New York, NY: Macmillan.

De Villiers, M. (1999). Rethinking proof with Geometer´s Sketchpad. Portsmouth, NH: Key Curriculum Press.

De Villiers, M. (2001). Papel e funções da demonstração no trabalho com o Sketchpad. Educação e Matemática, 63, 31-36.

De Villiers, M. (2003). O papel da demonstração na investigação em Geometria realizada em computador: algumas reflexões pessoais. In E. Veloso & N. Candeias (Org.), Geometria Dinâmica: selecção de textos do livro Geometry Turned On! (pp. 31-43). Lisboa: APM.

Duval, R. (1992-1993): Argumenter démontrer expliquer : continuité ou rupture cognitive? Petit X, 31, 37-61.

Ferreira, S. (2014). A Matemática nas Brincadeiras e Jogos indígenas. In Os desafios da escola pública paranaense na perspetiva do professor PDE Produções Didático-pedagógicas. Paraná: Universidade Estadual de Londrina.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *24*, 139-162.

Freudenthal, H. (1973). *Revisiting mathematics education: China Lectures*. Dordrecht: Kluwer.

Fujita, T., & Jones, K. (2002), The Bridge between Practical and Deductive Geometry: developing the "geometrical eye". In A. D. Cockburn and E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 2, pp. 384-391). University of East Anglia, Norwich, UK.

Fujita, T., Jones, K., & Yamamoto, S. (2004). The role of intuition in geometry education: learning from the teaching practice in the early 20th century. In *Proceedings of the 10th International Congress on Mathematical Education*, 4-11 July, 2004, p. 331-335. Copenhaga: IMFUFA, Department of Science, Systems and Models, Roskilde University.

Garry, T. (2003). The Geometer's Sketchpad na sala de aula. In: Veloso, E.; Candeias, N. (Org.). *Geometria Dinâmica: Selecção de textos do livro Geometry Turned On!* (pp. 69-78). Lisboa: APM.

Godfrey, C. (1910). The board of education circular on the teaching of geometry, *Mathematical Gazette*. *5*, 195-200.

Gravina (1996). Geometria dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da geometria. In *Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação* (pp. 1-13). Recife: (SBC) Sociedade Brasileira de Computação.

Hernández, F. (1998). *Transgressão e mudança na Educação: os projetos de trabalho*. Porto Alegre: ArtMed.

Jones, K., & Fujita, T. (2002), The Design of Geometry Teaching: learning from the geometry textbooks of Godfrey and Siddons, *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, *22*(2), 13-18.

Junqueira, M. (1994). *Aprendizagem da geometria em ambientes computacionais dinâmicos: Um estudo no 9.º ano de escolaridade*. Dissertação de mestrado, Universidade Nova de Lisboa.

Keyton, M. (2003). Alunos descobrem a geometria usando software de geometria dinâmica. In: Veloso, E.; Candeias, N. (Org.). *Geometria Dinâmica: Selecção de textos do livro Geometry Turned On!* (pp. 79-86). Lisboa: APM.

Lamas, R., & Mendes, I. (2017). *GeoGebra: Animações geométricas*. Curitiba: Appris.

Lanin, J. (2005). Generalization and justification: the challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Teaching and Learning*, *7*(3), 231-258.

Lanin, J., Ellis, A., Elliot, R. & Zbiek, R. M. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning for teaching mathematics in prekindergarten: Grade 8*. Reston, VA: NCTM.

Lea, H. (1990). Spatial concepts in the Kalahari. In G. Booker, P. Cobb and T. Mendicuti (Eds.), *Proceedings of 14th PME conference* (Vol. 2, pp 259-266), México: Program Committee of the 14th PME Conference.

Leivas, J. (2012). Educação geométrica: reflexões sobre ensino e aprendizagem em geometria. *Educação Matemática em Revista*, 1(13), 9-16.

Lopes, C. (2013). *A aprendizagem de perímetros e áreas com GeoGebra: Uma experiência de ensino*. Dissertação de mestrado, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Machado, S. & Santos, L. (2011). A demonstração matemática no 8.º ano no contexto de utilização do Geometer's Sketchpad. *Revista de Educação*, *18*(1), 48-82.

Machado, S. (2006). A aprendizagem da demonstração matemática no 8.º ano no contexto de utilização do Geometer´s Sketchpad. *Educação e Matemática*, *86*, 10-16.

Machado, S. (2008). *Aprendizagem em Matemática: Registros de representação semiótica* (4ª ed.). São Paulo: Papirus.

Margolinas, C., Ainley, J., Frant, J. B., Doorman, M., Kieran, C., Leung, A., Ohtani, M., Sullivan, P., Thompson, D., Watson, A., & Yang, Y. (2013). Task design in Mathematics Education. *In Proceedings of ICMI Study 22*, vol. 1, (p. 9-13). Oxford, UK: International Commission on Mathematical Instruction.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.). *Approaches to algebra, perspectives for research and teaching*. Dordrecht: Kluwer.

Mason, J. (2010). *Effective questioning and responding in the mathematics classroom.* Open University & University of Oxford. [Consult. 16.Set.2018]. Disponível em: http://mcs.open.ac.uk/jhm3/Selected%20Publications/Effective%20Questioning%20&%20Responding.pdf.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico* (PMEB). Lisboa: Ministério da Educação.

MEC (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico* (PMCM). Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

Monteiro, R. & Santos, L. (2013). A argumentação matemática na perspetiva da professora Rita. In Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática (Ed.), *Investigação em Educação Matemática 2013 Raciocínio Matemático* (pp. 170-184). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

Morelatti, M. R., & Souza, L. (2006). *Aprendizagem de conceitos geométricos pelo futuro professor das séries iniciais do ensino fundamental e as novas tecnologias*. *Educar em Revista,* 22(28)263-275.

NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar*. Lisboa: IIE e APM.

NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: IIE e APM.

NCTM (2014). *Princípios para a Ação: assegurar a todos o sucesso em Matemática*. Lisboa: APM.

Pimentel, T., & Vale, I. (2013). Raciocinar em geometria: o papel das tarefas. In Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática (Ed.), *Investigação em Educação Matemática 2013 Raciocínio Matemático* (pp. 130-146). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

Pinheiro, A., & Carreira, S. (2013). O desenvolvimento do raciocínio geométrico no tópico triângulos e quadriláteros. In Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática (Ed.), *Investigação em Educação Matemática 2013 Raciocínio Matemático* (pp. 147-169). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

Ponte, J. P. (1992). Concepções dos Professores de Matemática e Processos de Formação. J. P. Ponte (Ed.), *Educação matemática: Temas de investigação* (pp. 185-239). Lisboa: Instituto de Inovação Educacional. Lisboa: Ministério da Educação.

Ponte, J. P. (1995). Novas tecnologias na aula de Matemática. *Educação e Matemática*, *34*, 2-7.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional (*pp. 5-28). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2008). Investigar a nossa própria prática: uma estratégia de formação e de construção do conhecimento profissional. *PNA*, *2*(4), 153-180.

Ponte, J. P. (2014). *Práticas profissionais dos professores de Matemática*. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

Ponte, J. P., Brocardo, J.; Oliveira, H. (2006). *Investigação matemática na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2009). O Novo Programa de Matemática: Uma oportunidade de mudança. *Educação e Matemática*, *105*, 2-6.

Ponte, J. P., & Canavarro, A. P. (1997). *Matemática e novas tecnologias*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Henriques, A. (2012). O raciocínio matemático nos alunos do ensino básico e do ensino superior. *Praxis Educativa*, *7*(2), 355-377.

Ponte, J. P., Oliveira, H., & Varandas, J. M. (2000). *As novas tecnologias na formação inicial de professores: Análise de uma experiência*. Departamento de Educação e Centro de Investigação em Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2000). *Didáctica da Matemática para o 1.º ciclo do ensino básico*. Lisboa: Universidade Aberta.

Rivera, F., & Becker, J. (2007). Abduction-induction (generalization) processes of elementary majors on figural patterns in algebra. *Journal of Mathematical Behavior*, *26*, 140-155.

Rodrigues, M., & Bernardo, M. (2011). Ensino e aprendizagem da Geometria. In Associação de Professores de Matemática (Ed.), *Atas do XXII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 339-344). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Stein, M., Engle, R., Smith, M., & Hughes, E. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*, 313-340.

Valente, J. A. (1993). *Computadores e conhecimento: Repensando a Educação*. Campinas: Gráfica Central da Unicamp.

Veloso, E. (1998). *Geometria: Temas actuais: Materiais para professores*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Veloso, E., Fonseca, H., Ponte, J. P., & Abrantes, P. (1999). *Investigações em Geometria na Sala de Aula. Ensino da Geometria no virar do milénio.* Lisboa: Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Yakel, E., & Hanna, G. (2003). Reasoning and Proof. In J. Kilpatrick, W. Martin & D. Schifter, (Eds.). *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 227-236). Reston: NCTM.

Zimmermann, W., & Cunningham, S. (1991). Visualization in Teaching and Learning Mathematic: a project. Washington, D.C.: Mathematical Association of America.

Anexos

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS SÁ DA BANDEIRA - 170562
ESCOLA DO ENSINO BÁSICO 2 E 3 D. JOÃO II - SANTARÉM – 340790
Rua Cidade D' Agen, Jardim de Baixo, 2005-503 Santarém
Tel. 243.307120 - Fax. 243.307125 - e-mail: geral@agrupamentosabandeira.pt

ESCOLA BÁSICA 2, 3 D. JOÃO II
SANTARÉM

Santarém, 29 de novembro de 2017

Exma. Sra. Diretora do Agrupamento de Escolas Sá da Bandeira

Eu, Sandra Maria Henriques Cipriano Carvalho, docente de Matemática na Escola EB 2,3 D. João II, venho por este meio solicitar autorização para concretizar na turma 9º D, o trabalho que dará suporte ao meu estudo de Mestrado, a desenvolver sob orientação do Professor João Pedro Mendes da Ponte sobre o tema "As potencialidades do uso da Geometria Dinâmica no estudo da Circunferência no 9.º ano". Este trabalho integra-se no âmbito do curso de Mestrado em Educação na Área de Especialização em Didática da Matemática, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

No decorrer do trabalho as principais formas de recolha de dados serão: observação das aulas, gravações aúdio/vídeo, narração escrita de momentos das aulas, entrevistas/questionários aos alunos e recolha de trabalhos produzidos pelos alunos. Será solicitada autorização aos Encarregados de Educação dos alunos para a participação neste trabalho e será salvaguardado o anonimato.

Grata pela colaboração e com os melhores cumprimentos,

Pede deferimento,

____

(Sandra Maria Henriques Cipriano Carvalho)

Com o conhecimento do Orientador

____

(João Pedro Mendes da Ponte)

Anexo II – Pedido de autorização aos Pais/Encarregados de Educação

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS SÁ DA BANDEIRA - 170562
ESCOLA DO ENSINO BÁSICO 2 E 3 D. JOÃO II - SANTARÉM – 340790
Rua Cidade D' Agen, Jardim de Baixo, 2005-503 Santarém
Tel. 243.307120 - Fax. 243.307125 - e-mail: geral@agrupamentosabandeira.pt

ESCOLA BÁSICA 2, 3 D. JOÃO II
SANTARÉM

Santarém, 4 de janeiro de 2018

Exmo.(a). Sr.(a). Encarregado(a) de Educação

Consciente de que o trabalho de professor não é estático, pois para o professor é importante estar atualizado e também refletir e tentar melhorar as suas práticas com vista à melhoria das aprendizagens dos alunos, ao longo do meu percurso de docente de quase duas décadas, pesquisei bastante, frequentei inúmeras ações de formação contínua e esforcei-me por analisar e adaptar os meus processos de ensino. No seguimento desse esforço, inscrevi-me no Mestrado em Didática da Matemática, no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, que estou a frequentar e pretendo concretizar o meu trabalho no estudo da Circunferência no 9.º ano de escolaridade.

As dificuldades que os alunos demonstraram, em anos anteriores, prendem-se, essencialmente, com a dificuldade de visualização e o grau de abstração das propriedades enunciadas. Assim, e para colmatar estas dificuldades, irei apoiar o meu trabalho na criação de uma sequência de tarefas promotoras do desenvolvimento matemático dos alunos, recorrendo regularmente ao *software GeoGebra*, programa de Geometria Dinâmica.

Para concretizar este propósito será necessário proceder à recolha do trabalho produzido pelos alunos nas aulas, à transcrição de excertos das aulas, à realização de pequenos questionários/entrevistas escritas aos alunos e à gravação áudio/vídeo de algumas aulas. Os registos serão utilizados para o meu estudo. As imagens e as produções áudio não serão divulgados. Será sempre **garantido o anonimato dos alunos** participantes.

Assim sendo, venho por este solicitar o seu consentimento para a participação do seu educando neste estudo.

Estou, naturalmente, à sua inteira disposição para prestar qualquer esclarecimento, pessoalmente ou pelo endereço sandra.carvalho@agrupamentosabandeira.pt.

Agradecendo desde já a sua colaboração e com os melhores cumprimentos,

A professora de Matemática

____

(Sandra Carvalho)

(Recortar por aqui) --

Declaro que autorizo/não autorizo (riscar o que não interessa) que o meu educando____ número _____ da turma 9º D da Escola D.João II, participe neste estudo a ser desenvolvido pela professora Sandra Carvalho.

Data:___ /____ /______ Assinatura: ______________________________

DEPARTAMENTO da Matemática e das Ciências Experimentais GRUPO DE RECRUTAMENTO 500

<u>PLANIFICAÇÃO ANUAL POR PERÍODO LETIVO</u> (médio prazo) DISCIPLINA Matemática ANO 9º

Ano letivo 2017-2018

1º Período – Aulas previstas: 61 tempos de 45 min. (aprox.)								
Temas	Conteúdos	Domínios/Objetivos Descritores	NO9	ALG9	Recursos Estratégias/Atividades		Avaliação	Aulas previstas
Relação de ordem em IR. Inequações	1- Propriedades da relação de ordem em IR 2- Intervalos de números reais 3- Valores aproximados de números reais 4- Inequações 5- Resolução de Inequações 6- Conjuntos definidos por condições	Relação de ordem (NO9) 1. Reconhecer propriedades da relação de ordem em IR 2. Definir intervalos de números reais 3. Operar com valores aproximados de números reais 4. Resolver problemas Inequações (ALG9) 1. Resolver inequações do 1.º grau 2. Resolver problemas	1.1 a 1.7 2.1 a 2.5 3.1 a 3.4 4.1	 1.1 a 1.8 2.1	• Jogos didáticos • Materiais de escrita e de desenho • Caderno diário • Manual • Caderno de Atividades • Fichas de trabalho • Fichas de revisão • Tabelas de raízes quadradas e cúbicas • Computador (professor)	• Analogias com situações do dia-a-dia, para a introdução/exploração de conceitos • Diálogo professor ⇔ aluno • Consulta de tabelas • Exercícios de aplicação e de consolidação • Exploração de recursos de apresentação e interativos em suporte digital • Resolução de problemas	• Avaliação diagnóstica • Avaliação formativa • Avaliação sumativa • Observação direta do aluno • Participação na aula; • Responsabilidade na realização das tarefas e faz-se munir do material indispensável • Cumprimento de regras; • Trabalhos de casa • Pontualidade/ assiduidade	**30 tempos**

Axiomatização das teorias matemáticas. **Paralelismo e perpendicularidade de retas e planos**	1- Axiomatização das Teorias Matemáticas 2- Axiomatização da Geometria 3- Posições relativas de retas no plano e no espaço euclidiano 4- Posições relativas de retas e planos no espaço euclidiano 5- Posições relativas de planos no espaço euclidiano 6- Retas perpendiculares a planos no espaço euclidiano	Axiomatização das teorias Matemáticas (GM9) 1. Utilizar corretamente o vocabulário próprio do método axiomático 2. Identificar factos essenciais da axiomatização da Geometria Paralelismo e perpendicularidade de retas e planos (GM9) 3. Caracterizar a Geometria Euclidiana através do axioma das paralelas 4. Identificar posições relativas de retas no plano utilizando o axioma euclidiano de paralelismo 5. Identificar planos paralelos, retas paralelas e retas paralelas a planos no espaço euclidiano 6. Identificar planos perpendiculares e retas perpendiculares a planos no espaço euclidiano 7. Resolver problemas	GM9 1.1 a 1.6 2.1 a 2.4 3.1 a 3.3 4.1 a 4.3 5.1 a 5.8 6.1 a 6.9 7.1	• Materiais manipuláveis • Materiais de escrita e de desenho • Caderno diário • Manual • Caderno de Atividades • Fichas de trabalho • Fichas de revisão • Computador (professor)	• Analogias com situações do dia-a-dia, para a introdução/exploração de conceitos • Diálogo professor ⇔ aluno • Consulta de tabelas • Exercícios de aplicação e de consolidação • Exploração de recursos de apresentação e interativos em suporte digital • Resolução de problemas	• Avaliação diagnóstica • Avaliação formativa • Avaliação sumativa • Observação direta do aluno • Participação na aula; • Responsabilidade na realização das tarefas e faz-se munir do material indispensável • Cumprimento de regras; • Trabalhos de casa • Pontualidade/ assiduidade	**14 tempos**

Lugares geométricos	1- A bissetriz de um ângulo 2- Circuncentro e incentro de um triângulo 3- Ortocentro e baricentro de um triângulo	Lugares Geométricos envolvendo pontos notáveis de triângulos (GM9) 13. Identificar lugares geométricos 14. Resolver problemas	GM9 13.1 a 13.6 14.1	• Materiais manipuláveis • Materiais de escrita e de desenho • Caderno diário • Manual • Caderno de Atividades • Fichas de trabalho • Fichas de revisão • Computador (professor)	• Analogias com situações do dia-a-dia, para a introdução/exploração de conceitos • Diálogo professor ⇔ aluno • Exercícios de aplicação e de consolidação • Exploração de recursos de apresentação e interativos em suporte digital • Resolução de problemas	• Avaliação diagnóstica • Avaliação formativa • Avaliação sumativa • Observação direta do aluno • Participação na aula • Responsabilidade na realização das tarefas e faz-se munir do material indispensável • Cumprimento de regras; • Trabalhos de casa • Pontualidade/assiduidade	**16 tempos**

2º Período – Aulas previstas: 49 tempos de 45 min. (aprox.)							
Temas	Conteúdos	Domínios/Objetivos Descritores		Recursos Estratégias/Atividades		Avaliação	Aulas previstas
Circunferência	1- Ângulo ao centro. Área de um setor circular. Arcos e cordas 2- Relações entre arcos e cordas numa circunferência 3- Ângulo inscrito 4- Ângulo de segmento. Ângulo ex-inscrito 5- Ângulo de vértice no interior de um círculo. Ângulo de vértice exterior a um círculo 6- Soma dos ângulos internos e externos de um polígono 7- Polígono inscrito numa circunferência	Medida (GM9) 9. Comparar e calcular áreas e volumes Circunferência (GM9) 15. Conhecer propriedades de ângulos, cordas e arcos definidos numa circunferência 16. Resolver problemas	GM9 9.5 9.6 15.1 a 15.18 16.1 a 16.3	• Materiais manipuláveis • Materiais de escrita e de desenho • Caderno diário • Manual • Caderno de Atividades • Fichas de trabalho • Fichas de revisão • Computador (professor)	• Analogias com situações do dia-a-dia, para a introdução/exploração de conceitos • Diálogo professor ⇔ aluno • Exercícios de aplicação e de consolidação • Elaboração de esquemas síntese • Exploração de recursos de apresentação e interativos em suporte digital • Resolução de problemas	• Avaliação diagnóstica • Avaliação formativa • Avaliação sumativa • Observação direta do aluno • Participação na aula • Responsabilidade na realização das tarefas e faz-se munir do material indispensável • Cumprimento de regras; • Trabalhos de casa • Pontualidade/assiduidade	**17 tempos**

Distâncias. Áreas e Volumes de sólidos	1- Distâncias entre pontos e planos, retas e planos e entre planos paralelos 2- Sólidos geométricos 3- Volume da pirâmide 4- Volume do cone 5- Volume da esfera 6- Área da superfície de um poliedro 7- Área da superfície lateral de um cone reto 8- Área da superfície esférica	Medida (GM9) 8. Definir distâncias entre pontos e planos, retas e planos e entre planos paralelos 9. Comparar e calcular áreas e volumes 10. Resolver problemas	GM9 8.1 a 8.4 9.1 a 9.4 9.7 a 9.9 10.1	• Materiais manipuláveis • Materiais de escrita e de desenho • Caderno diário • Manual • Caderno de Atividades • Fichas de trabalho • Fichas de revisão • Computador (professor)	• Analogias com situações do dia-a-dia, para a introdução/exploração de conceitos • Diálogo professor ⇔ aluno • Exercícios de aplicação e de consolidação • Elaboração de esquemas síntese • Exploração de recursos de apresentação e interativos em suporte digital • Resolução de problemas	• Avaliação diagnóstica • Avaliação formativa • Avaliação sumativa • Observação direta do aluno • Participação na aula • Responsabilidade na realização das tarefas e faz-se munir do material indispensável • Cumprimento de regras; • Trabalhos de casa • Pontualidade/ assiduidade	**16 tempos**
Trigonometria	1- Razões trigonométricas de ângulos agudos 2- Relações entre razões trigonométricas 3- Razões trigonométricas dos ângulos de 45^o, 30^o e 60^o	Trigonometria (GM9) 11. Definir e utilizar razões trigonométricas de ângulos agudos 12. Resolver problemas	GM9 11.1 a 11.13 12.1 a 12.3				**16 tempos**

<table>
<tr><th colspan="10">3º Período – Aulas previstas: 38 tempos de 45 min. (aprox.)</th></tr>
<tr><th>Temas</th><th>Conteúdos</th><th colspan="3">Domínios/Objetivos
Descritores</th><th colspan="2">Recursos
Estratégias/Atividades</th><th>Avaliação</th><th>Aulas previstas</th></tr>
<tr><td>Equações do 2.º grau</td><td>1- Equações do 2.º grau completas (completamento do quadrado)
2- Equações do 2.º grau completas (fórmula resolvente)</td><td>Equações do 2.º grau (ALG9)

3. Completar quadrados e resolver equações do 2.º grau
4. Resolver problemas</td><td colspan="2">ALG9

3.1
a
3.5

4.1</td><td rowspan="2">• Materiais manipuláveis
• Materiais de escrita e de desenho
• Caderno diário
• Manual
• Caderno de Atividades
• Fichas de trabalho
• Fichas de revisão
• Computador (professor)</td><td rowspan="2">• Analogias com situações do dia-a-dia, para a introdução/exploração de conceitos
• Diálogo professor ⇔ aluno
• Exercícios de aplicação e de consolidação
• Elaboração de esquemas síntese
• Exploração de recursos de apresentação e interativos em suporte digital
• Resolução de problemas</td><td rowspan="2">• Avaliação diagnóstica
• Avaliação formativa
• Avaliação sumativa
• Observação direta do aluno
• Participação na aula
• Responsabilidade na realização das tarefas e faz-se munir do material indispensável
• Cumprimento de regras;
• Trabalhos de casa
• Pontualidade/ assiduidade</td><td>10 tempos</td></tr>
<tr><td>Proporcionalidade inversa.
Funções algébricas</td><td>1- Proporcionalidade inversa
2- Função de proporcionalidade inversa
3- Funções do tipo y = ax^2, com $a \neq 0$</td><td>Proporcionalidade Inversa (ALG9)
5. Relacionar grandezas inversamente proporcionais
6. Resolver problemas

Funções algébricas (FSS9)
1. Definir funções de proporcionalidade inversa
2. Resolver problemas
3. Interpretar graficamente soluções de equações do segundo grau</td><td>ALG9

5.1
a
5.3
6.1</td><td>FSS9

1.1
1.2
2.1
3.1
3.2</td><td>12 tempos</td></tr>
</table>

Histogramas. Probabilidades	1- Variáveis estatísticas discretas e variáveis estatísticas contínuas 2- Histogramas 3- Experiências aleatórias e experiências deterministas 4- Noção de acontecimento 5- Probabilidade de um acontecimento 6- Acontecimentos complementares. Acontecimentos disjuntos 7- Frequência relativa e probabilidade	Histogramas (OTD9) 1. Organizar e representar dados em histogramas 2. Resolver problemas Probabilidade (OTD9) 3. Utilizar corretamente a linguagem da probabilidade	OTD9 1.1 a 1.6 2.1 3.1 a 3.11	• Materiais manipuláveis • Materiais de escrita e de desenho • Caderno diário • Manual • Caderno de Atividades • Fichas de trabalho • Fichas de revisão • Computador (professor)	• Analogias com situações do dia-a-dia, para a introdução/exploração de conceitos • Diálogo professor ⇔ aluno • Exercícios de aplicação e de consolidação • Elaboração de esquemas síntese • Exploração de recursos de apresentação e interativos em suporte digital • Resolução de problemas	• Avaliação diagnóstica • Avaliação formativa • Avaliação sumativa • Observação direta do aluno • Participação na aula • Responsabilidade na realização das tarefas e faz-se munir do material indispensável • Cumprimento de regras; • Trabalhos de casa • Pontualidade/assiduidade	**16 tempos**

Em anos letivos anteriores foi já abordada a definição de:

- Circunferência – uma circunferência em determinado plano é o conjunto de pontos desse plano a uma distância dada (raio) de um ponto nele fixado (centro) (GM3 2.1)

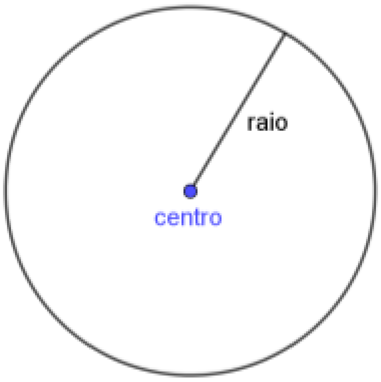


Figura 1 - circunferência

Os alunos também sabem já utilizar corretamente os termos “centro”, “raio” e “diâmetro” (GM3 2.3) e representar circunferências utilizando um compasso (GM3 2.1) dada a utilização comum que fazem destes conceitos. Já foram também revistas as definições de:

- Parte interna de uma circunferência – a parte interna de uma circunferência é o conjunto de pontos do plano cuja distância ao centro é inferior ao raio (GM3 2.4).

Figura 2 - parte interna de uma circunferência

- Círculo – um círculo é a reunião de uma circunferência com a respetiva parte interna (GM3 2.5).

Figura 3 - círculo

Também serão recordadas as definições de ângulo convexo AOB:

- Ângulo convexo – um ângulo convexo AOB de vértice O (A, O e B pontos não colineares) é o conjunto de pontos pertencentes às semirretas situadas entre $\dot{\mathrm{O}}\mathrm{A}$ e $\dot{\mathrm{O}}\mathrm{B}$ (GM4 2.2).

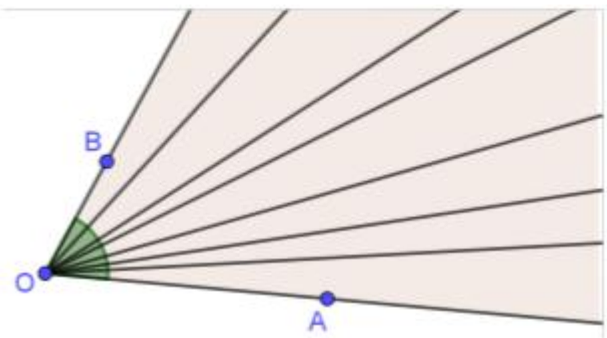


Figura 4 - ângulo convexo ou simplesmente ângulo

e de ângulo AOB:

- Ângulo – dados três pontos A, O e B não colineares, o ângulo AOB é uma designação do ângulo convexo AOB, salvo indicação em contrário (GM4 2.6).

Já dentro do previsto na *Tarefa 1 - relação entre comprimento do arco, área do setor circular e amplitude do respetivo ângulo ao centro* será revisto o que se entende por perímetro e área do círculo, bem como as respetivas fórmulas:

- Perímetro do círculo - fixada uma unidade de comprimento, o perímetro de um círculo é igual ao produto de π pelo diâmetro e ao produto do dobro de π pelo raio e exprimir simbolicamente estas relações (GM6 5.3)

$$P_{círculo} = d \times \pi = 2\pi \times r$$

Fórmula 1 - perímetro do círculo

- Área do círculo - fixada uma unidade de comprimento, a área de um círculo (em unidades quadradas) é igual ao produto de π pelo quadrado do raio (GM6 5.5)

$$A_{círculo} = \pi \times r^2$$

Fórmula 2 - Área do círculo

Para possibilitar a contextualização do que se segue serão ainda revistas as definições de:

- Ângulo ao centro – dada uma circunferência, um ângulo ao centro é um ângulo com vértice no centro (GM6 1.1).

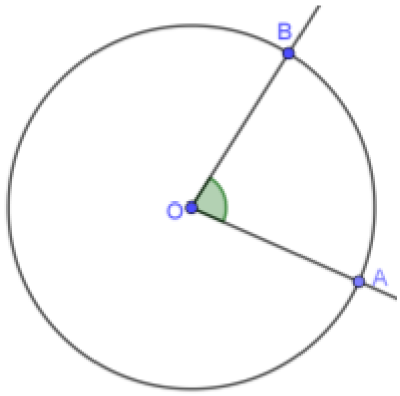


Figura 5 - ângulo ao centro

- Setor circular – dada uma circunferência, um setor circular é a interseção de um ângulo ao centro com o círculo (GM6 1.2).

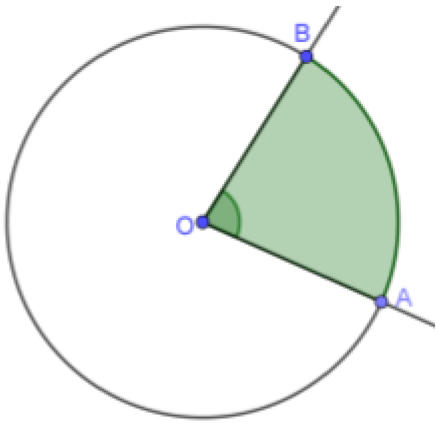


Figura 6 - setor circular

Posteriormente serão apresentadas as definições de:

- Arco de circunferência – dada uma circunferência, um arco de circunferência é a interseção de um ângulo ao centro com a circunferência (GM9 15.1).
- Arco menor – dados dois pontos A e B de uma circunferência de centro O, não diametralmente opostos, o arco menor AB, ou simplesmente arco AB, é o arco determinado na circunferência pelo ângulo ao centro convexo AOB (GM9 15.2).
- Arco maior - dados dois pontos A e B de uma circunferência de centro O, não diametralmente opostos, o arco maior AB é o arco determinado na circunferência pelo ângulo ao centro côncavo AOB (GM9 15.3).
- Arco definido por três pontos - dados três pontos A, B e P de uma circunferência, o arco APB é o arco de extremos A e B que contém o ponto P (GM9 15.4).

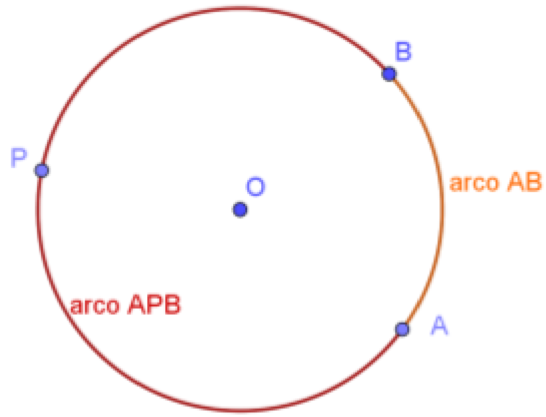


Figura 7 - arco menor, arco, arco maior, arco definido por três pontos

- Corda - dados dois pontos A e B de uma circunferência a corda AB é o segmento de reta [AB] pelo ângulo ao centro convexo AOB (GM9 15.5).
- Arcos subtensos pela corda - dados dois pontos A e B de uma circunferência os arcos subtensos pela corda AB são os arcos de extremos A e B e o arco subtenso menor designa-se por arco correspondente à corda AB (GM9 15.5).
- Amplitude de um arco – a amplitude de um arco de circunferência APB é a amplitude do ângulo ao centro correspondente e representa-se por $\widehat{\mathrm{APB}}$, ou simplesmente por $\widehat{\mathrm{AB}}$ quando se tratar de um arco menor (GM9 15.7).

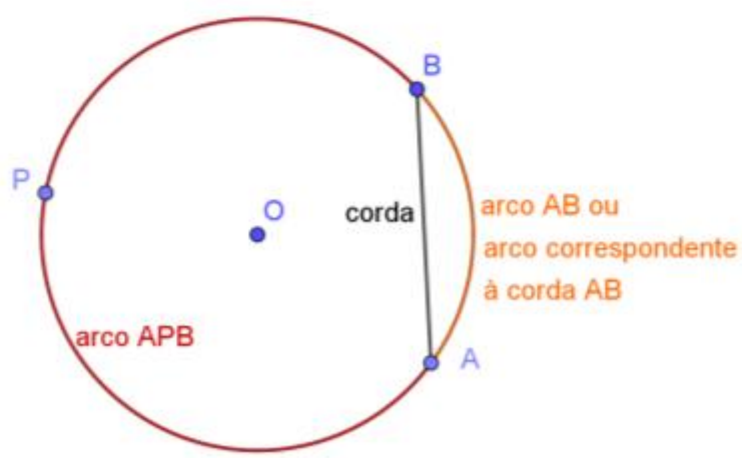


Figura 8 - corda, arcos subtensos pela corda, arco correspondente à corda

No decurso do trabalho com a Tarefa 1 surge também a definição de:

- Grandezas diretamente proporcionais – uma grandeza é diretamente proporcional a outra da qual depende quando, fixadas unidades, o quociente entre a medida da primeira e a medida da segunda é constante, valor este que se designa por constante de proporcionalidade direta (ALG6 4.2)

Cumpridos os objetivos desta tarefa chega-se à *Tarefa 2: Circunferência – relações entre ângulos ao centro, arcos e cordas correspondentes* na qual não é imperativo rever nem introduzir novas definições. Já na *Tarefa 3: Circunferência – reta tangente a uma circunferência, arcos e cordas entre retas paralelas e reta perpendicular a uma corda* é imprescindível a referência à seguinte definição, efetivamente já utilizada neste ano letivo:

- Retas perpendiculares – duas retas são perpendiculares quando formam um ângulo reto e nesta situação os restantes três ângulos são igualmente retos (GM6 3.1).

Para possibilitar a contextualização do que se segue será ainda revista a definição de:

- Reta perpendicular a uma circunferência – dado um ponto P numa circunferência e um ponto P, se uma reta interseta a circunferência apenas em P então é tangente à circunferência (GM6 1.4).

Para efeitos comparativos considera-se vantajosa a referência a reta secante a uma circunferência quando tem com a mesma dois pontos em comum e a reta exterior a uma circunferência quando a reta e a circunferência não se intersetam.

Prosseguindo para a *Tarefa 4: Circunferência – ângulo inscrito*, é necessário introduzir as definições de:

- Ângulo inscrito – dado um arco de circunferência é um ângulo inscrito qualquer ângulo de vértice no arco, distinto dos extremos, e com lados passando por eles (GM9 15.10)
- Arco capaz e arco compreendido entre os lados – dado um ângulo inscrito AVB, o arco AVB é o arco capaz do ângulo inscrito e o arco AB é o arco compreendido entre os lados do ângulo (GM9 15.10).

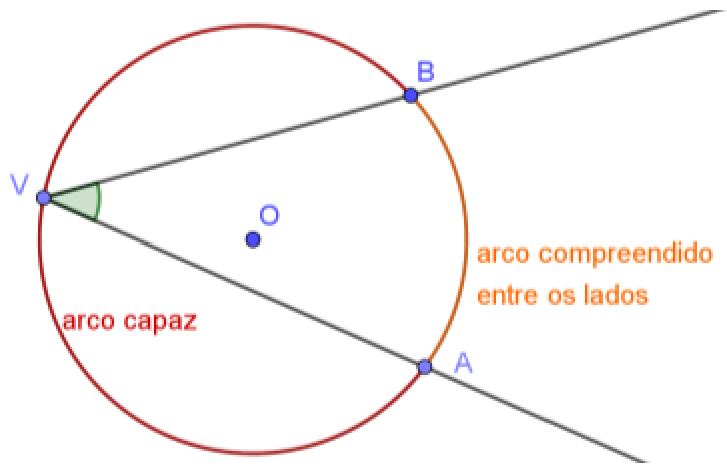


Figura 9 - ângulo inscrito, arco capaz e arco compreendido entre os lados

Reveladas as propriedades inerentes ao ângulo inscrito é a vez de propor a *Tarefa 5: Circunferência – ângulo de segmento, ângulo ex-inscrito*, que requer o conhecimento das definições de:

- Segmento de círculo – designa-se por segmento de círculo a região do círculo compreendido entre uma corda e um arco por ela subtenso, dito "maior" quando o arco for maior e "menor" quando o arco for menor (GM9 15.12).

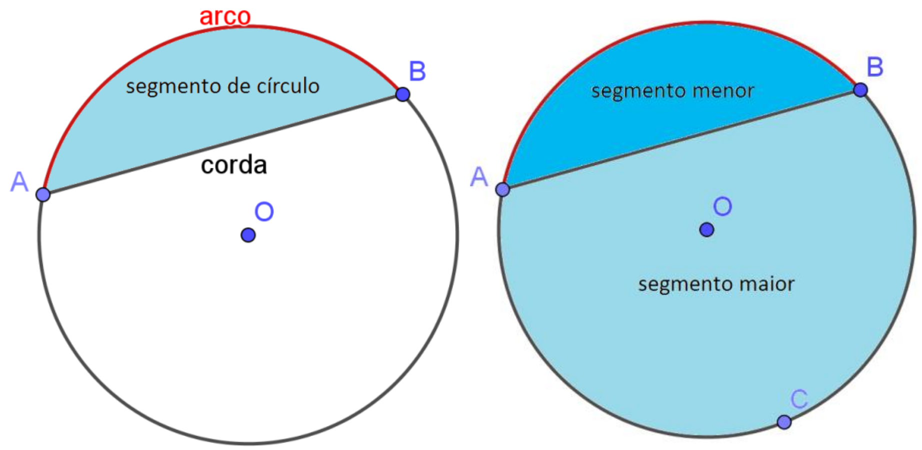


Figura 10 – segmento de círculo, segmento menor e segmento maior

- Ângulo de segmento – designa-se por ângulo de segmento um ângulo de vértice num dos extremos de uma corda com um dos lados contendo a corda e o outro tangente à circunferência no vértice (GM9 15.13).

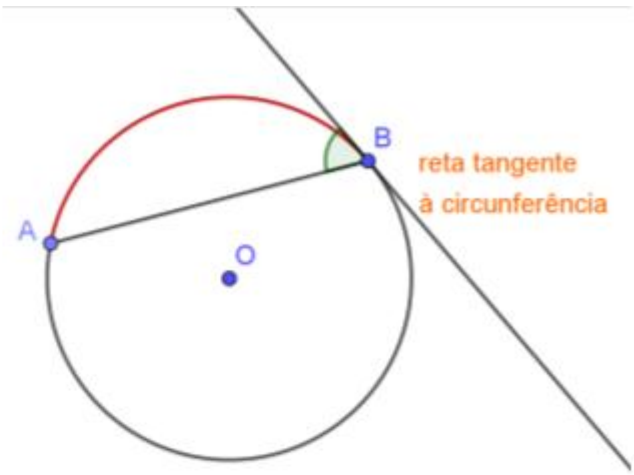


Figura 11 – ângulo de segmento

- Ângulo ex-inscrito – designa-se por ângulo ex-inscrito num arco de circunferência um ângulo adjacente a um ângulo inscrito e a ele suplementar (GM9 15.14).

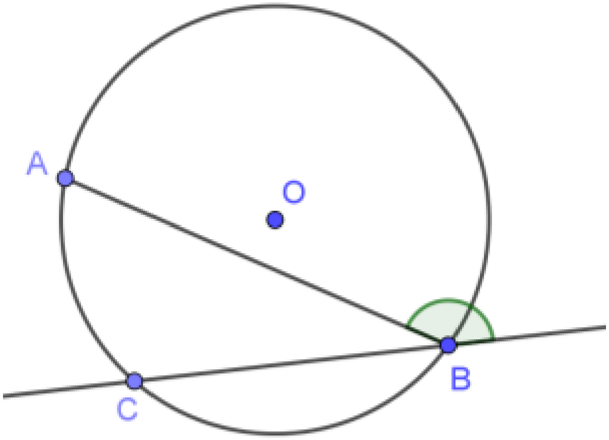


Figura 12 – ângulo ex-inscrito

Analisadas as definições e estudadas as propriedades relacionadas com estas entidades será proposta aos alunos a *Tarefa 6: Circunferência – ângulo de vértice no interior do círculo, ângulo de vértice exterior a um círculo* que requer o conhecimento das seguintes definições:

- Ângulo convexo de vértice no interior do círculo – designa-se por ângulo convexo de vértice no interior do círculo um ângulo cujo vértice está na parte interna de uma circunferência e as retas suporte dos seus lados contêm cordas (GM9 15.15).

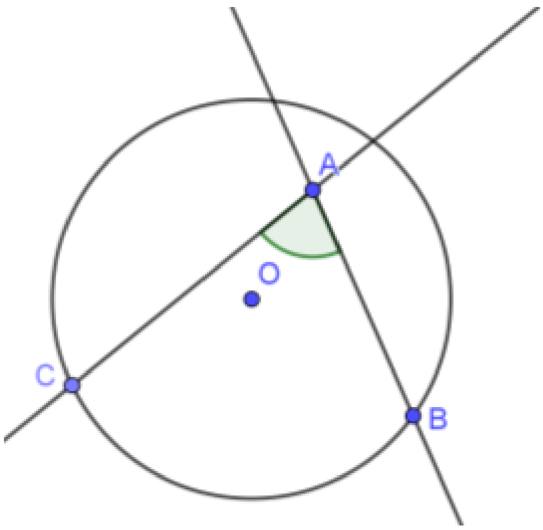


Figura 13 – ângulo de vértice no interior de um círculo

- Ângulo de vértice exterior a um círculo – designa-se por ângulo de vértice exterior a um círculo um ângulo cujo vértice está no exterior do círculo e cujos lados o intersetam (GM9 15.16).

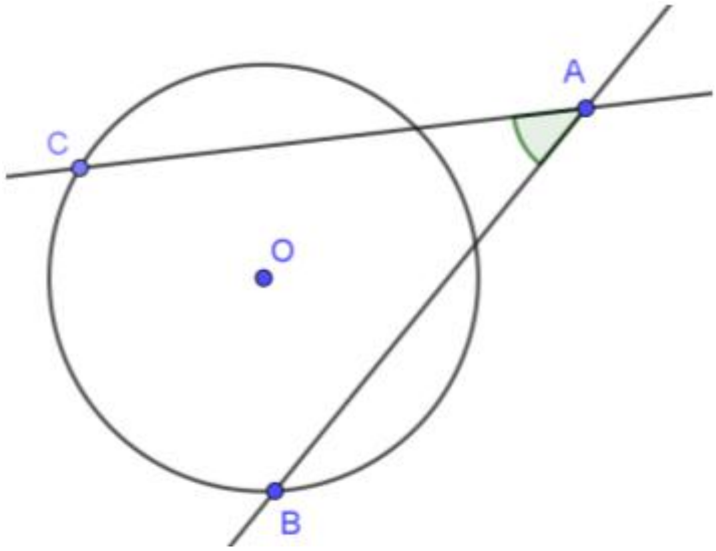


Figura 14 – ângulo de vértice no exterior de um círculo

Explorados os casos particulares dos ângulos acima referidos e as relações das suas amplitudes com as amplitudes dos arcos compreendidos entre os seus lados e outros, passarei aos polígonos inscritos numa circunferência.

Antes de abordar o tema é imprescindível relembrar as definições de:

- Polígono – um polígono simples, ou apenas polígono, como a união dos lados de uma linha poligonal fechada simples com a respetiva parte interna (GM7 2.5).
- Polígono regular – designa-se por polígono regular um polígono de lados e ângulos iguais (GM4 3.6).
- Ângulo interno de um polígono – identifica-se um ângulo interno de um polígono como um ângulo de vértice coincidente com um vértice do polígono, de lados contendo os lados do polígono que se encontram nesse vértice, tal que um setor circular determinado por esse ângulo está contido no polígono (GM7 2.8).

- Ângulo externo de um polígono – identifica-se um ângulo externo de um polígono convexo como um ângulo suplementar e adjacente a um ângulo interno do polígono (GM7 2.11).
- Polígono convexo e polígono côncavo – um polígono designa-se por convexo quando qualquer segmento de reta que une dois pontos do polígono está nele contido e por côncavo no caso contrário (GM7 2.9) e, também, um polígono é convexo quando (e apenas quando) os ângulos internos são todos convexos e que, neste caso, o polígono é igual à interseção dos respetivos ângulos internos (GM7 2.10).
- Polígono inscrito numa circunferência – identifica-se um polígono como inscrito numa dada circunferência quando os respetivos vértices são pontos da circunferência (GM6 1.3).

Tarefa 1: Circunferência – relação entre comprimento do arco, área do setor circular e amplitude do respetivo ângulo ao centro

Nome:____	Nº ___	Turma: ___	Data: __/__/__
Nome:____	Nº ___	Turma: ___	Data: __/__/__

Pré-requisitos: Área e perímetro do círculo.

Relembra que:

$$P_{círculo} = d \times \pi = 2\pi \times r$$

$$A_{círculo} = \pi \times r^2$$

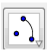
Definições: ângulo ao centro, setor circular, arco de circunferência, corda, arcos subtensos e arco correspondente a corda, grandezas diretamente proporcionais

Vamos lá criar no GeoGebra!

Construção da circunferência:

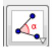
1- desloca o cursor até , seleciona o botão e clica sobre a zona gráfica. Obténs assim o ponto A.
2- clica mais uma vez sobre a zona gráfica e obténs assim o ponto B.
3- desloca o cursor até , seleciona o botão e clica depois em A e em B, para construíres a circunferência de centro em A e que passa por B.
4- vamos agora medir o raio da circunferência. Desloca o cursor até , seleciona , clica em A e depois em B. Aparecerá o seu comprimento registado na folha algébrica. Com o botão direito do rato clica sobre o raio, seleciona renomear e escreve r.
5- clica em  do teclado e guarda a imagem num ficheiro word, escrevendo na linha acima Passo 5.

Construção do arco de circunferência:

6- desloca o cursor até , seleciona o botão e escolhe sobre a circunferência dois pontos que se autonomearão C e D.
7- desloca o cursor até , clica na setinha no canto inferior direito do botão e seleciona . Agora seleciona o centro da circunferência (A) e os pontos C e D. Obténs assim o arco CD cujo comprimento aparece na folha algébrica. Com o botão direito do rato clica sobre o arco, seleciona renomear e escreve l.
8- clica em  do teclado e guarda a imagem no ficheiro word, escrevendo na linha acima Passo 8.

Construção do ângulo ao centro:

9- Começa por traçar as semirretas AD e AC. Para tal desloca o cursor até , clica e seleciona , com o cursor seleciona A e depois C para definir a semirreta AC e depois A e D para construir AD.

10- vamos agora definir o ângulo DAC. Para tal desloca o cursor até , clica no botão e na folha gráfica seleciona um dos pontos sobre a circunferência, o centro e o outro ponto, seguindo a ordem no sentido positivo (contrária aos ponteiros do relógio). Na folha algébrica aparece a amplitude do ângulo com a designação ⍰.

11- clica em  do teclado e guarda a imagem no ficheiro word, escrevendo na linha acima Passo 11.

Construção do setor circular:

12- clica em , seleciona setor circular, clica em A e depois nos pontos C e D seguindo a ordem no sentido positivo. Obténs assim o setor circular definido pelos pontos C e D, cuja área aparece na folha algébrica associada a uma letra. Com o botão direito do rato clica sobre o setor circular, seleciona renomear e escreve a.

13- clica em  do teclado e guarda a imagem no ficheiro word, escrevendo na linha acima Passo 13.

Feitas as construções, vamos agora investigar!

Começa por selecionar . Clicando sobre os pontos C e D podes deslocá-los e assim fazes variar o comprimento do arco CD bem como a área do setor circular. Se clicares sobre o ponto B fazes variar também o raio da circunferência.

a) Regista na tabela abaixo os resultados de algumas das tuas variações (cinco), consultando a folha algébrica e também de alguns cálculos (área do círculo e perímetro da circunferência), aproximando os resultados com 2 casas decimais.

Raio r					
Amplitude de α					
Comprimento do arco CD (l)					
$\frac{l}{\alpha}$					
Perímetro da circunferência (P)					
$\frac{P}{l}$					
Área do setor circular (a)					
$\frac{\mathrm{a}}{\alpha}$					
Área do Círculo (A)					
$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{a}}$					

b) O que está a acontecer? Apresenta a tua conjetura.

c) Apresenta uma sugestão para as fórmulas do comprimento do arco e da área do setor circular.

d) Como poderemos escrever a fórmula da área do setor circular integrando a fórmula do comprimento do arco?

Vamos consolidar: resolve os exercícios 4, 6, 7 e 8 da página 119 do manual.

Tarefa 2: Circunferência – relações entre ângulos ao centro, arcos e cordas correspondentes

Nome:_________________________________ Nº ___ Turma: ___ Data: __/__/__

Nome:_________________________________ Nº ___ Turma: ___ Data: __/__/__

Vamos lá criar no GeoGebra!

Construção da circunferência e de duas cordas com o mesmo comprimento ([CD] e [EF]):

1- desloca o cursor até , seleciona o botão e clica sobre a zona gráfica. Obténs assim o ponto A.

2- clica mais uma vez sobre a zona gráfica e obténs assim o ponto B.

3- desloca o cursor até , seleciona o botão e clica depois em A e em B, para construíres a circunferência de centro em A e que passa por B.

4- desloca o cursor até , seleciona o botão e clica sobre a circunferência. Obténs assim o ponto C. Repete a operação e obténs assim o ponto D.

5- desloca o cursor até , seleciona , clica em C e depois em D. Obterás assim a corda [CD] e aparecerá o seu comprimento registado na folha algébrica. Com o botão direito do rato clica sobre a corda, seleciona renomear e escreve d.

6- desloca o cursor até , seleciona o botão e clica sobre a circunferência. Obténs assim um outro ponto E.

7- para determinar os pontos da circunferência que estão à distância d do ponto E constrói a circunferência de centro E e raio d, clicando , seleciona o botão  e clica depois em E e na caixa que surgir escreve d. De seguida desloca o cursor até  ,seleciona o botão  e seleciona ambas as circunferências com o cursor. Surgirão assim os pontos F e G.

8- clica em 

do teclado e guarda a imagem num ficheiro word, escrevendo na linha acima Passo 7.

Vamos agora investigar!

Tenta responder às seguintes questões observando atentamente as construções efetuadas.

Será que arcos com o mesmo comprimento são congruentes? Que relação existe entre as cordas [CD] e [EF]? Será que os arcos menores CD e EF têm o mesmo comprimento? E será que os ângulos ao centro CAD e EAF têm a mesma amplitude?

Elabora as tuas conjeturas e testa-as!

Para tal constrói os arcos de circunferência referidos e mede os seus comprimentos, constrói os ângulos ao centro correspondentes a esses arcos e mede as suas amplitudes (recorre às indicações dadas na Tarefa 1). Seleciona o botão e desloca os pontos B, C e D. Regista na tabela abaixo os resultados de algumas das tuas variações (cinco). Apresenta prints das várias variações que fizeres.

Raio da circunferência de centro A que contém B					
Comprimento da corda [CD]					
Comprimento da corda [EF]					
Comprimento do arco menor CD					
Comprimento do arco menor EF					
Amplitude do ângulo ao centro CAD					
Amplitude do ângulo ao centro EAF					
Amplitude do arco menor CD					
Amplitude do arco menor EF					

As tuas conjeturas confirmam-se? Sistematiza-as completando as frases seguintes:

Arcos com o mesmo comprimento são

A cordas congruentes correspondem

A ângulos ao centro congruentes correspondem

A arcos congruentes correspondem

Vamos consolidar: resolve os exercícios 1, 2, 3 e 5 da página 119 do manual.

Tarefa 3: Circunferência –reta tangente a uma circunferência, arcos e cordas entre retas paralelas e reta perpendicular a uma corda

Nome:____ Nº ___ Turma: ___ Data: __/__/__

Nome:____ Nº ___ Turma: ___ Data: __/__/__

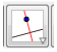
Definições: reta tangente a uma circunferência (ponto de tangência), reta secante, reta exterior

Vamos lá criar no GeoGebra!

Construção da circunferência:

1- desloca o cursor até , seleciona o botão e clica sobre a zona gráfica. Obténs assim o ponto A.
2- clica mais uma vez sobre a zona gráfica e obténs assim o ponto B.
3- desloca o cursor até , seleciona o botão e clica depois em A e em B, para construíres a circunferência de centro em A e que passa por B.
4- clica em  do teclado e guarda a imagem no ficheiro word, escrevendo na linha acima Passo 3.

Construção da reta tangente à circunferência:

5- desloca o cursor até , seleciona o botão e escolhe sobre a circunferência um qualquer ponto da mesma, ser-lhe-á atribuída a letra C.
6- desloca o cursor até , clica na setinha no canto inferior direito do botão e seleciona a segunda opção . Obténs assim o segmento de reta [AC] que coincide com o raio da circunferência.
7- vai com o cursor até  e seleciona a quinta opção  para construir a reta tangente à circunferência que contém o ponto C. Para tal seleciona com o cursor a circunferência e em seguida o ponto C.
8- clica em  do teclado e guarda a imagem no ficheiro word, escrevendo na linha acima Passo 7.

Vamos lá investigar!

a) Quanto medirá o ângulo formado pelo segmento [AC] com a tangente?

b) Verifica a veracidade da tua conjetura, medindo o ângulo. Para tal segue os seguintes passos:

9- leva o cursor até , e sobre a reta seleciona um qualquer ponto que ficará identificado como ponto D.

10- desloca o cursor até , clica no botão e na folha gráfica seleciona o ponto da reta/circunferência, o centro e o outro ponto, seguindo a ordem no sentido positivo. Na folha algébrica aparece a amplitude do ângulo com a designação α.

11- podes ainda deslocar o ponto C sobre a circunferência e verificar se há alterações, bem como alterar o valor do raio que se encontra no seletor. Podes ainda atribuir a A outras coordenadas.

12- faz duas simulações e clica em do teclado e guarda as imagens no ficheiro word, escrevendo na linha acima Passo 11, simulação 1 e simulação 2 respetivamente.

c) A tua conjetura confirma-se? Completa a frase seguinte "Uma reta tangente a uma circunferência forma com o raio que contém o ponto de tangência um ângulo ________, ou seja a reta tangente é _______________ à reta que passa no centro e no ponto de tangência".

Vamos lá continuar a criar no GeoGebra!

<u>Construção de duas retas secantes à circunferência e paralelas entre si</u>:

13- desloca o cursor até , seleciona o botão e clica sobre a circunferência, obterás o ponto E. Repete a operação e obterás o ponto F.

14- leva o cursor até , seleciona com a setinha da direita do botão o ícone , seleciona os pontos E e F e obterás assim a corda [EF].

15- desloca o cursor até , seleciona o botão e clica sobre a circunferência, obterás o ponto G. Traça agora a reta paralela a EF que contem o ponto G. Para tal desloca o curso até , na setinha da direita seleciona o ícone , e de seguida o ponto G e a corda [EF].

16- determine-se agora o ponto de interseção da reta com a circunferência. Desloca o cursor até , seleciona ícone e clica sobre a reta traçada no passo anterior e a circunferência. Obterás assim os pontos H e I, com em que um deles coincide com o ponto G.

17- constrói agora a corda [HI], levando o cursor até , selecionando com a setinha da direita do botão o ícone , e clicando em seguida nos pontos H e I.

18- para simplificar a imagem desloca o cursor até à folha algébrica e clica sobre os pontos que precedem o ponto G e a reta HI para que estes objetos deixem de se ver na folha gráfica. Podes fazer o mesmo com o ângulo reto obtido, a reta tangente e o raio da circunferência.

19- clica em do teclado e guarda a imagem no ficheiro word, escrevendo na linha acima Passo 18.

Vamos lá continuar a investigar!

d) Será que existe alguma relação entre os comprimentos das cordas entre estas duas retas paralelas? Que te parece?

e) Será que existe alguma relação entre os comprimentos dos arcos entre estas duas retas paralelas? Que te parece?

Para averiguares se as tuas conjeturas se confirmam, continua:

20- repete os procedimentos para construir uma corda (ver o passo 14) e traça as cordas constituídas pelos extremos das cordas [EF] e [HI] (sem que se intersetem no interior da circunferência). Na folha algébrica observa os seus comprimentos (na secção Segmento de Reta).

21- repete os procedimentos para desenhar um arco de circunferência (ver o passo 7 da Tarefa 1) e traça os arcos constituídos pelos extremos das cordas [EF] e [HI] (sem que se intersetem). Na folha algébrica observa os seus comprimentos (na secção Cónica).

22- clica em 

do teclado e guarda a imagem no ficheiro word, escrevendo na linha acima Passo 21.

Seleciona o botão  , clica sobre o ponto G (para voltar a aparecer), e desloca os pontos B, E e F. Regista na tabela abaixo os resultados de algumas das tuas variações (cinco). Apresenta prints das várias variações que fizeres.

Raio da circunferência de centro A que contém B					
Comprimento da corda [____] compreendida entre as cordas [EF] e [HI]					
Comprimento da corda [____] compreendida entre as cordas [EF] e [HI]					
Comprimento do arco menor ____ compreendido entre as cordas [EF] e [HI]					
Comprimento do arco menor ____ compreendido entre as cordas [EF] e [HI]					

f) A tua conjetura confirma-se? Completa a frase seguinte “Numa circunferência, as cordas e os arcos compreendidos entre duas retas paralelas são ________________.”

Vamos lá continuar a criar no GeoGebra!

Construção de uma reta perpendicular a uma corda que passa no centro da circunferência:

23- desloca o cursor até , seleciona o botão e clica sobre a circunferência, sobre o botão direito do rato, e seleciona apagar.
24- constrói uma nova circunferência de centro A a passar por B (ver passo 3).
25- marca dois pontos sobre a circunferência e traça a corda (ver os passos 13 e 14).
26- para traçar a reta perpendicular à corda que passa pelo centro da circunferência desloca o cursor até  e de seguida clica sobre o centro A e a corda construída no passo anterior.
27- determinemos o ponto de interseção da corda com a sua perpendicular, deslocando o cursor até , selecionando  e clicando sobre a reta e a corda. Será o ponto E.
28- determinemos o ponto de interseção da circunferência com a reta, deslocando o cursor até , selecionando  e clicando sobre a reta e a circunferência. Serão os pontos F e G.
29- clica em 

do teclado e guarda a imagem no ficheiro word, escrevendo na linha acima Passo 28.

Vamos lá continuar a investigar!

g) Será que existe alguma relação entre os comprimentos dos segmentos de reta [CE] e [DE]? Que te parece?

h) Será que existe alguma relação entre os comprimentos dos arcos subtensos menores CF e DF (ou CG e DG)? Que te parece?

i) Será que existe alguma relação entre as amplitudes dos ângulos ao centro CAE e DAE? Que te parece?

Para averiguares se a tua conjeturas se confirma, continua:

30- repete os procedimentos para construir uma corda (ver o passo 14) e traça as cordas [CE] e [DE].
31- repete os procedimentos para construir um arco (ver o passo 7 da Tarefa 1) e traça os arcos subtensos menores CF e DF (ou CG e DG).
32- repete os procedimentos para construir um ângulo ao centro (ver o passo 10 da Tarefa 1) e marca os ângulos CAE e DAE.

Seleciona o botão  , clica sobre os pontos B, C ou D, movimentando-os. Regista na tabela abaixo os resultados de algumas das tuas simulações (cinco). Apresenta prints de duas das simulações que fizeres identificando-as como Passo 32, simulação 1 e Passo 32, simulação 2.

Raio da circunferência de centro A que contém B					
Comprimento da corda [CE]					
Comprimento da corda [DE]					
Comprimento do arco menor CF					
Comprimento do arco menor DF					
Amplitude do ângulo ao centro CAE					
Amplitude do ângulo ao centro DAE					

j) A tua conjetura confirma-se? Completa a frase seguinte "Numa circunferência, se uma reta é perpendicular a uma corda e passa pelo centro então divide-a em duas partes ________________, assim como aos arcos subtensos e aos ângulos ao centro correspondentes."

Vamos consolidar: resolve os exercícios 1, 2, 3, 4 e 5 da página 123 do manual.

Tarefa 4: Circunferência – ângulo inscrito

Nome:____ Nº ___ Turma: ___ Data: __/__/__

Nome:____ Nº ___ Turma: ___ Data: __/__/__

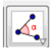
<u>Definições</u>: ângulo inscrito, arco capaz do ângulo inscrito, arco compreendido entre os lados do ângulo inscrito.

Vamos lá criar no GeoGebra!

<u>Construção de uma circunferência</u>:

1- desloca o cursor até , seleciona o botão e clica sobre a zona gráfica. Obténs assim o ponto A.
2- clica mais uma vez sobre a zona gráfica e obténs assim o ponto B.
3- desloca o cursor até , seleciona o botão e clica depois em A e em B, para construíres a circunferência de centro em A e que passa por B.
4- clica em  do teclado e guarda a imagem no ficheiro word, escrevendo na linha acima Passo 3.

<u>Construção de um ângulo inscrito</u>:

5- desloca o cursor até , seleciona o botão e escolhe sobre a circunferência três pontos e ser-lhe-ão atribuídas as letras C, D e E.
6- desloca o cursor até , clica na setinha no canto inferior direito do botão e seleciona a segunda opção . Escolhe um dos pontos sobre a circunferência para ser o vértice do ângulo inscrito (C, D ou E) e traça as semiretas com origem nesse ponto e a conter um dos outros, que serão os lados do ângulo inscrito.
7- vai com o cursor até , clica sobre os pontos C, D e E, sempre seguindo o sentido positivo (contrário ao dos ponteiros do relógio) e obterás assim a amplitude do ângulo inscrito que ficará designada por α.
8- clica em  do teclado e guarda a imagem no ficheiro word, escrevendo na linha acima Passo 7.

<u>Construção do ângulo ao centro que corresponde ao arco compreendido entre os lados do ângulo inscrito</u>:

9- desloca o cursor até , clica na setinha no canto inferior direito do botão e seleciona a segunda opção ; traça as semirretas com origem em A que contêm os pontos de interseção dos lados do ângulo inscrito com a circunferência.

10- mede agora a amplitude do arco compreendido entre os lados do ângulo inscrito, selecionando  e clicando sempre nos pontos que definem o ângulo pela ordem correspondente ao sentido positivo.

11- clica em 

do teclado e guarda a imagem no ficheiro word, escrevendo na linha acima Passo 10.

Vamos lá investigar!

a) Será que existe alguma relação entre a amplitude do ângulo inscrito e a amplitude do arco compreendido entre os seus lados?

b) Verifica a veracidade da tua conjetura, fazendo algumas simulações. Para tal seleciona  e desloca os pontos B, C, D, e E.

O que acontece, quando:

- se movimenta o ponto B?
- se movimenta o ponto C?
- se movimenta o ponto D?
- se movimenta o ponto E?

c) A tua conjetura confirma-se? Completa a frase seguinte "A amplitude do ângulo inscrito é ______________ da amplitude do arco compreendido entre os seus lados (que coincide com a amplitude do ângulo ao centro que lhe corresponde)."

Vamos lá continuar a criar no GeoGebra!

Construção de outro ângulo inscrito correspondente ao mesmo arco:

12- seguindo o descrito nos passos 5 e 6, cria o ponto F sobre a circunferência e as semirretas de modo a que contenham os pontos que definem o arco compreendido entre os lados do ângulo inscrito já traçado.

13- repete o passo 10 para medir a amplitude do ângulo inscrito agora traçado.

14- clica em 

do teclado e guarda a imagem no ficheiro word, escrevendo na linha acima Passo 12.

Vamos lá continuar a investigar!

d) Será que existe alguma relação entre a amplitude dos ângulos inscritos no mesmo arco? Qual a tua conjetura?

e) Verifica a veracidade da tua conjetura, fazendo algumas simulações, movendo os pontos com o cursor e completa a frase "Os **ângulos inscritos** no mesmo arco têm ________________amplitude."

Vamos lá continuar a criar no GeoGebra, e a investigar, observando um caso particular!

E se o arco corresponder a um ângulo raso? Como poderemos forçar a corda correspondente ao arco ser um diâmetro? Como definir um extremo a partir do outro para que tal aconteça?

Apresenta as tuas sugestões e testa-as.

f) assim que consigas obter o pretendido clica em 

do teclado e guarda a imagem no ficheiro word, escrevendo na linha acima alínea f).

E agora?

Qual será a amplitude de um ângulo inscrito numa semicircunferência?

g) Verifica a veracidade da tua conjetura, fazendo algumas simulações, movendo os pontos com o cursor e completa a frase "Um **ângulo inscrito** numa semicircunferência é um ângulo ________ (isto é, um triângulo inscrito numa semicircunferência é um triângulo ______________)."

Vamos consolidar: resolve os exercícios 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 da página 129 do manual.

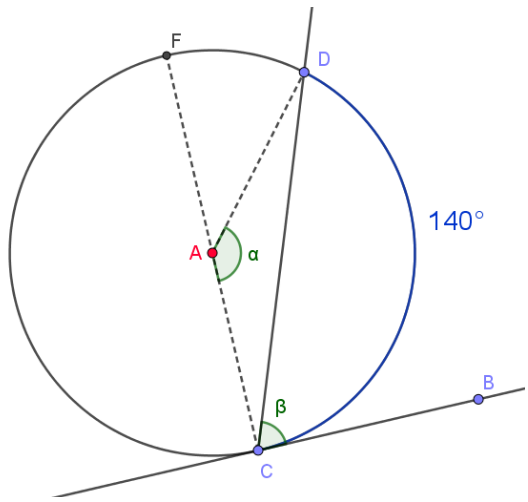
Tarefa 5: Circunferência – ângulo de segmento, ângulo ex-inscrito

Nome:____ Nº ___ Turma: ___ Data: __/__/__
Nome:____ Nº ___ Turma: ___ Data: __/__/__

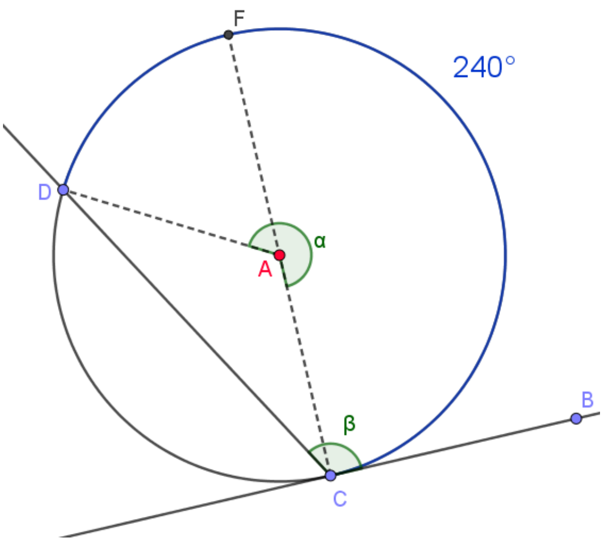
<u>Definições</u>: segmento de círculo (maior e menor), ângulo de segmento, ângulo ex-inscrito.

1. Observa as figuras seguintes, em que a reta BC é tangente à circunferência de centro A no ponto C.

I.



II.



a) em cada uma das figuras qual a amplitude do ângulo FCB? Justifica.

b) determina a medida da amplitude dos ângulos DAF, em cada uma das figuras.

c) determina a medida da amplitude dos ângulos DCF, em cada uma das figuras.

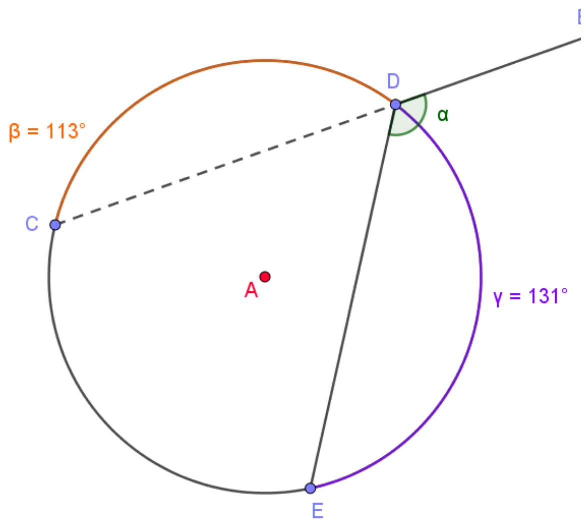
d) Parece-te haver alguma relação entre a amplitude do ângulo de segmento (β) e a amplitude do arco compreendido entre os seus lados (α)? Qual a tua conjetura?

e) Tenta demonstrar a tua conjetura algebricamente, usando as letras da figura e justificando.

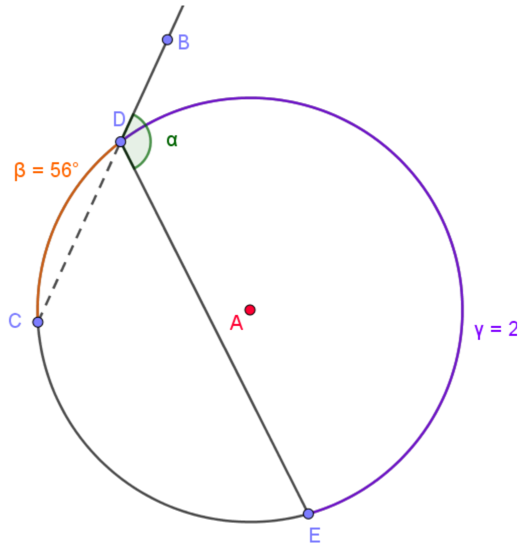
f) Se estiveres com dificuldade solicita à tua professora aplicações GeoGebra que te possibilitarão fazer algumas simulações manuseando os objetos das figuras, cria um ficheiro word com prints de algumas delas e tenta novamente resolver a alínea e).

2. Observa as figuras seguintes em que na circunferência de centro A, [CD] e [DE] são duas cordas com um vértice em comum e o ponto B pertence à reta CD.

III.



IV.



a) em cada uma das figuras qual a amplitude do arco CE? Justifica.

b) determina a medida da amplitude dos ângulos CDE, em cada uma das figuras.

c) determina a medida da amplitude dos ângulos BDE, designados por α, em cada uma das figuras.

d) Parece-te haver alguma relação entre a amplitude do ângulo ex-inscrito (α) e amplitude dos arcos correspondentes às cordas que as retas suporte dos lados contêm (β) e (γ) nas figuras? Qual a tua conjetura?

e) Tenta demonstrar a tua conjetura algebricamente, usando as letras da figura e justificando.

f) Se estiveres com dificuldade solicita à tua professora aplicações GeoGebra que te possibilitarão fazer algumas simulações manuseando os objetos das figuras, cria um ficheiro word com prints de algumas delas e tenta novamente resolver a alínea e).

Vamos consolidar: resolve os exercícios 1, 2, 3, 4 e 5 da página 132 do manual.

Tarefa 6: Circunferência – ângulo de vértice no interior do círculo, ângulo de vértice exterior a um círculo

Nome:_______________________________________	Nº ___ Turma: ___ Data: __/__/__
Nome:_______________________________________	Nº ___ Turma: ___ Data: __/__/__

<u>Definições</u>: ângulo de vértice no interior do círculo, ângulo de vértice exterior a um círculo.

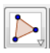
Vamos lá criar no GeoGebra!

<u>Construção de uma circunferência</u>:

1- desloca o cursor até , seleciona o botão e clica sobre a zona gráfica. Obténs assim o ponto A.
2- clica mais uma vez sobre a zona gráfica e obténs assim o ponto B.
3- desloca o cursor até , seleciona o botão e clica depois em A e em B, para construíres a circunferência de centro em A e que passa por B.
4- Com o botão direito do rato clica sobre o ponto B e seleciona a opção Mostrar objetos para o mesmo não ser mostrado na imagem. Podes fazer o mesmo com a circunferência e selecionar Mostrar rótulo.
5- clica em 

do teclado e guarda a imagem no ficheiro word, escrevendo na linha acima Passo 4.

<u>Construção de um ângulo de vértice no interior do círculo e um triângulo</u>:

6- desloca o cursor até , seleciona o botão e escolhe sobre a circunferência dois pontos C e D e no interior do círculo um ponto E.
7- desloca o cursor até , clica na setinha no canto inferior direito do botão e seleciona a segunda opção . Clica sobre o ponto C e sobre o E e depois sobre o ponto D e depois sobre o ponto E para traçar as semirretas $\dot{C}E$ e $\dot{D}E$, respetivamente.
8- desloca o cursor até , seleciona a partir da setinha a opção  e clica sobre uma das semirretas traçadas e sobre a circunferência. Surgem assim dois pontos, um que coincide com a origem da semirreta e outro. Repete o procedimento para a outra semirreta.
9- Onde estiverem apresentados dois pontos sobrepostos com o botão direito do rato faz com que apareça apenas um rótulo. Renomeia os pontos de modo a termos o ponto E no interior do círculo como interseção das cordas [CI] e [DG].
10- Vamos agora construir o triângulo cujos vértices são C, D e E. Clica sobre  e em seguida sobre os três pontos referidos, e voltando ao primeiro. Para simplificar a imagem eliminemos os rótulos dos lados do triângulo com o botão direito do rato.
11- vamos agora medir os ângulos internos do triângulo [CDE], clicando em  e sobre os pontos sempre seguindo o sentido positivo.

12- clica em 

do teclado e guarda a imagem no ficheiro word, escrevendo na linha acima Passo 11.

Vamos lá investigar!

O objetivo è descobrir como podemos determinar a amplitude de CEG se conhecermos (ou tivermos como conhecer) as amplitudes dos arcos compreendidos entre os lados do ângulo e os lados do ângulo verticalmente oposto.

Faz algumas movimentações dos pontos sobre a circunferência e regista os dados na tabela.

Amplitude do ângulo de vértice no interior de um círculo CEG					
Amplitude do ângulo DCI					
Amplitude do arco DI					
Amplitude do ângulo CDG					
Amplitude do arco CG					

a) Qual a tua conjetura?

b) A tua conjetura confirma-se? Completa a frase seguinte "A amplitude de um ângulo com **vértice no interior** de um círculo é igual _______________ da soma das amplitudes dos arcos compreendidos entre os lados do ângulo e os lados do ângulo _________________________________."

Continuemos a investigar!

Clica sobre o ponto C e arrasta-o para o exterior da circunferência e clica em 

do teclado e guarda a imagem no ficheiro word, escrevendo na linha acima Ângulo com Vértice no Exterior. O objetivo agora é descobrir como podemos determinar a amplitude de DCF se conhecermos (ou tivermos como conhecer) as amplitudes dos arcos maior e menor compreendidos entre os seus lados.

Faz algumas movimentações dos pontos sobre a circunferência e regista os dados na tabela.

Amplitude do ângulo de vértice exterior a um círculo DCF					
Amplitude do ângulo FGD					
Amplitude do arco FD					
Amplitude do ângulo GDI					
Amplitude do arco GI					

a) Qual a tua conjetura?

b) A tua conjetura confirma-se? Completa a frase seguinte “A amplitude de um ângulo com **vértice exterior** a um círculo, e cujos lados o intersetam, é igual ____________________ da diferença entre as amplitudes dos arcos maior e menor compreendidos entre os seus lados.”

Vamos consolidar: resolve os exercícios 1, 2, 3, 4, 5 e 6 da página 135 do manual.

Tarefa 7: Circunferência – soma dos ângulos internos e externos de um polígono; polígono inscrito numa circunferência

Nome:____	Nº ___ Turma: ___ Data: __/__/__
Nome:____	Nº ___ Turma: ___ Data: __/__/__

<u>Definições</u>: polígono, polígono regular, ângulo interno e externo de um polígono, polígono convexo e polígono concavo, polígono inscrito numa circunferência

<u>Pré-requisitos</u>:

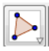
Relembra que, designando por i um ângulo interno e por e o ângulo externo correspondente, $i + e = 180^0$.

Ainda:

A soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é dada por $$S_i = (n-2) \times 180^0$$	A soma dos ângulos externos de um polígono convexo é dada por $$S_e = 360^0$$

Vamos lá criar no GeoGebra e calcular!

<u>Construção de polígonos convexos</u>:

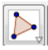
1- desloca o cursor até , seleciona o botão e clica sobre a zona gráfica em 7 pontos distintos de modo a construir um polígono convexo com 7 lados.
2- traça cada ângulo externo desenhando sobre cada lado uma semirreta que o contém e marca sobre ela um ponto exterior ao polígono.
3- vamos agora medir os ângulos internos do polígono, clicando em  e sobre os pontos sempre seguindo o sentido positivo.
4- clica em 

do teclado e guarda a imagem no ficheiro word, escrevendo na linha acima Passo 3.
5- aplicando as fórmulas referidas na tabela acima, determina a soma dos ângulos internos e dos ângulos externos do polígono e confirma depois somando os valores das amplitudes.

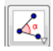
	soma dos ângulos internos	soma dos ângulos externos
A partir da Fórmula		
Soma a partir do polígono criado no GeoGebra		

Construção de polígonos convexos:

6- define o número de lados para o polígono convexo: n = ____

7- desloca o cursor até , seleciona o botão e clica sobre a zona gráfica em n pontos distintos de modo a construir um polígono convexo com n lados.

8- traça cada ângulo externo desenhando sobre cada lado uma semirreta que o contém e marca sobre ela um ponto exterior ao polígono.

9- vamos agora medir os ângulos internos do polígono, clicando em  e sobre os pontos sempre seguindo o sentido positivo.

10- clica em 

do teclado e guarda a imagem no ficheiro word, escrevendo na linha acima Passo 9.

11- aplicando a fórmula referida na tabela acima, determina a soma dos ângulos internos do polígono e confirma depois somando os valores das amplitudes.

	soma dos ângulos internos	soma dos ângulos externos
A partir da Fórmula		
Soma a partir do polígono criado no GeoGebra		

Vamos lá demonstrar!

1) Já verificámos que a fórmula se aplica em dois exemplos.
Demonstremos que se verifica para qualquer n , sendo n o número de lados:

a) Se em cada vértice há um ângulo interno e um ângulo externo qual será a soma dos n ângulos externos com os n ângulos internos?

b) Se fixarmos um qualquer vértice de um polígono de n lados, quantos triângulos sem sobreposição conseguimos fazer unindo-o aos outros vértices? Faz algumas simulações no GeoGebra que te ajudem a conjeturar e regista-os indicando Prints b).

c) Sabendo que em cada triângulo a soma dos ângulos internos é 180^0, de quantos graus será a soma de todos os ângulos internos?

d) Assim sendo de quanto será a soma dos ângulos externos? Demonstra algebricamente.
Sugestão: Subtrai à soma obtida na alínea a) a expressão obtida na alínea c).

e) Se o polígono for regular quando mede cada ângulo externo? Deduz uma fórmula.

f) Se o polígono for regular quando mede cada ângulo interno? Deduz uma fórmula.

2) Imagina agora um quadrilátero [ABCD] inscrito numa circunferência de centro A. Sejam α e β dois dos seus ângulos internos opostos. Quanto será $\alpha + \beta$? Demonstra algebricamente.
Sugestão: se necessário recorre ao Geogebra para uma simulação, comparando a amplitude dos ângulos internos com a amplitude dos arcos compreendidos entre os seus lados e clica em 

do teclado e guarda como ex. 2).

Vamos consolidar: resolve os exercícios 1, 2, 3, 4 e 5 da página 139, bem como os exercícios 2, 3, 4, 5, 6 e 9 da página 143 do manual.

Capítulo 4 - Circunferência (Resumo Teórico)

Perímetros e Áreas:

$$P_{círculo} = 2\pi r$$

$l_{arco\ AC}$ – *comprimento do arco AC*

$l_{arco\ AC} = \frac{\alpha\pi r}{180}$ em que α é a amplitude do ângulo ao centro correspondente ao arco e r é o raio da circunferência.

$$A_{círculo} = \pi r^2$$

$A_{SCirc\ AOB}$ – *área do setor circular AOB*

$A_{SCirc\ AOB} = \frac{\alpha\pi r^2}{360} = l_{arco\ AB} \times \frac{r}{2}$ em que α é a amplitude do ângulo ao centro correspondente ao arco e r é o raio da circunferência.

	Definições	Propriedades
Ângulos , arcos, cordas e retas	**Ângulo ao centro** numa circunferência é um ângulo que tem o vértice no centro da circunferência e cada lado contém um raio. (Tarefa 1) **Setor circular** é a interseção de um círculo com um ângulo ao centro. (Tarefa 1) **Arco de circunferência** é a interseção de uma circunferência com um ângulo ao centro e a sua amplitude é igual à amplitude do **ângulo ao centro** que lhe corresponde. (Tarefa 1) **Reta tangente** a uma circunferência é uma reta que tem com a circunferência um único ponto comum – <u>ponto de tangência.</u> (Tarefa 3) **Reta secante** a uma circunferência é uma reta que tem com a circunferência dois pontos comuns. (Tarefa 3) **Reta exterior** a uma circunferência é uma reta que não tem qualquer ponto em comum com a circunferência. (Tarefa 3) **Ângulo inscrito** numa circunferência é um ângulo que tem o vértice na circunferência e os lados contêm cordas. (Tarefa 4) **Ângulo de segmento** é um ângulo que tem o vértice num dos extremos de uma corda, um dos lados contém essa corda e o outro lado tangente à circunferência. (Tarefa 5) **Ângulo ex-inscrito** é um ângulo adjacente e suplementar a um ângulo inscrito. (Tarefa 5)	**1-** O comprimento de um **arco de circunferência** e a área de um **setor circular** são diretamente proporcionais à amplitude do respetivo ângulo ao centro. (Tarefa 1) **2-** **Arcos** com o mesmo comprimento são congruentes. (Tarefa 2) **3-** A **ângulos ao centro** congruentes correspondem arcos e cordas congruentes, e vice-versa. (Tarefa 2) **4-** Uma **reta tangente** a uma circunferência é perpendicular à reta que passa no centro e no ponto de tangência. (Tarefa 3) **5-** Numa circunferência, as cordas e os arcos compreendidos **entre duas retas paralelas** são congruentes. (Tarefa 3) **6-** Numa circunferência, se uma **reta é perpendicular a uma corda e passa pelo centro** então divide-a em duas partes iguais, assim como aos arcos subtensos e aos ângulos ao centro correspondentes. (Tarefa 3) **7-** A amplitude de um **ângulo inscrito** é metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados. (Tarefa 4) **8-** Os **ângulos inscritos** no mesmo arco têm a mesma amplitude. (Tarefa 4) **9-** Um **ângulo inscrito numa semicircunferência** é um ângulo reto (isto é, um triângulo inscrito numa semicircunferência é um triângulo retângulo). (Tarefa 4) **10-** A amplitude de um **ângulo de segmento** é metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados. (Tarefa 5) **11-** A amplitude de um **ângulo ex-inscrito** é igual a metade da soma das amplitudes dos arcos correspondentes às cordas que as retas suporte dos lados do ângulo contêm. (Tarefa 5) **12-** A amplitude de um **ângulo com vértice no interior de um círculo** é igual a metade da soma das amplitudes dos arcos compreendidos entre os seus lados e os lados do ângulo verticalmente oposto. (Tarefa 6) **13-** A amplitude de um **ângulo com vértice exterior a um círculo**, e cujos lados o intersetam, é igual a metade da diferença entre as amplitudes dos arcos maior e menor compreendidos entre os seus lados. (Tarefa 6)

Polígonos	Um **polígono** é uma linha poligonal fechada. (Tarefa 7) Num **polígono regular** os lados e os ângulos internos são iguais. (Tarefa 7) Um **polígono é convexo** se qualquer segmento de reta que una dois dos seus pontos estiver contido no polígono. Um polígono é **concavo** se não for convexo. (Tarefa 7) Um **polígono inscrito numa circunferência** é um polígono em que os respetivos vértices são pontos da circunferência. (Tarefa 7)	**14-** Num polígono convexo de n lados a **soma das amplitudes dos ângulos internos** é $(n-2)\times 180^0$. (Tarefa 7) **15-** Num polígono convexo a **soma das amplitudes dos ângulos externos** é 360^0. (Tarefa 7) **16-** Num **quadrilátero inscrito** numa circunferência a soma de dois ângulos internos opostos é 180^0. (Tarefa 7)

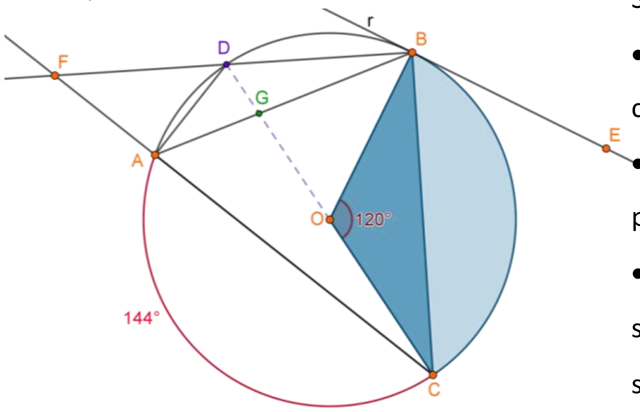
Ficha de Trabalho para Avaliação – Circunferência – 9º ano

Nome:_________________________________ Nº ___ Turma: ____ Data: ___/___/____	
Avaliação:_____________________________________ Assinatura Prof.:_______________	

Importante: *Lê atentamente cada uma das questões e segue as indicações dadas no enunciado. Nas questões de resposta aberta apresenta todos os cálculos/esquemas que efetuares de modo a tornar clara a tua estratégia de resolução e a tua resposta.*

Bom trabalho!

1. Considera a figura seguinte onde se encontra representada uma circunferência de centro no ponto O e com 5 cm de raio.



Sabe-se que:

- os pontos A, B, C e D pertencem à circunferência;
- a reta r é tangente à circunferência no ponto B e contém o ponto E;
- a semirreta $\dot{C}F$ contém o ponto A, a semirreta $\dot{B}D$ contém o ponto F e a semirreta $\dot{C}O$ contém o ponto D;
- $B\hat{O}C = 120^0$, $\widehat{AC} = 144^0$ e $\overline{BC} = 5\sqrt{3}\ cm$;
- os pontos E e F estão a uma distância de O superior a 5 cm;
- o ponto G é a interseção dos segmentos de reta [AB] e [OD].

1.1. Usando as letras indicadas na figura indica:

1.1.1. uma corda;	**1.1.2.** dois raios;	**1.1.3.** um diâmetro;
1.1.4. um ângulo inscrito;	**1.1.5.** um ângulo de segmento;	**1.1.6.** um ângulo com o vértice no exterior da circunferência;
1.1.7. um ângulo ao centro;	**1.1.8.** um ângulo ex-inscrito;	**1.1.9.** um ângulo com o vértice no interior do círculo.

1.2. Classifica quanto aos lados o triângulo [OBC]. Justifica.

1.3. Mostra que a altura do triângulo [OBC] em relação à base [BC] é 2,5 cm.

Pág. 1 - versão 1

1.4. Determina o valor exato:

1.4.1. do perímetro do triângulo [OBC] em centímetros.

1.4.2. da área do triângulo [OBC] em cm^2.

1.4.3. da área do setor circular OBC em cm^2.

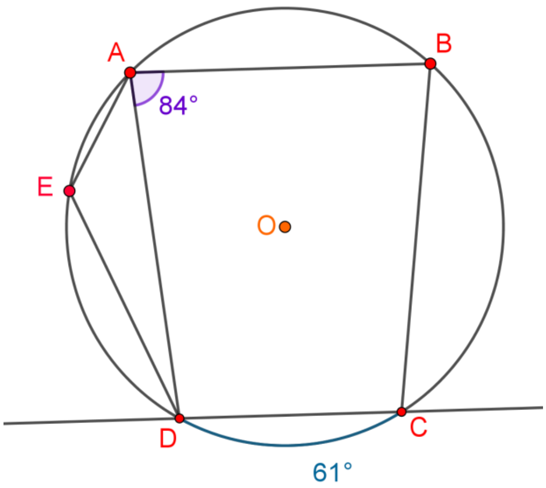
1.4.4. o comprimento do arco BAC em centímetros.

1.5. Determina as amplitudes dos ângulos e arcos seguintes:

1.5.1. ângulo CAB;	**1.5.2.** ângulo OCB;	**1.5.3.** arco DB;
1.5.4. arco DC;	**1.5.5.** arco DA;	**1.5.6.** ângulo CBE;
1.5.7. ângulo BAF;	**1.5.8.** ângulo BFC;	**1.5.9.** ângulo CGB.

1.6. Verifica que são suplementares os ângulos internos opostos do quadrilátero [ADBC] e que a sua soma é 360^0.

2. Observa a figura seguinte em que se encontram representados o quadrilátero [ABCD] e o pentágono [ABCDE].



Sabe-se que:

- $D\hat{A}B = 84^0$;
- $\widehat{DC} = 61^0$;
- as retas AB e DC são paralelas.

2.1. Justifica a afirmação "O quadrilátero [ABCD] é um trapézio isósceles."

2.2. Determina, justificando todos os cálculos, a amplitude do arco AB.

2.3. Sem determinar a amplitude de todos os seus ângulos internos, indica, justificando:

2.3.1. o valor da soma dos ângulos internos do pentágono [ABCDE];

2.3.2. o valor da soma dos ângulos externos do pentágono [ABCDE].

FIM

"A diferença entre o fracasso e o sucesso está numa tentativa a mais."

Landislau Landisbokilia

Questão	1.1	1.2	1.3	1.4.1	1.4.2	1.4.3	1.4.4	1.5	1.6	2.1	2.2	2.3.1	2.3.2	Total
%	13,5	4	5	5	5	5	5	31,5	4,5	6	6	5	4,5	100

Confia nas tuas capacidades!

Sandra Carvalho

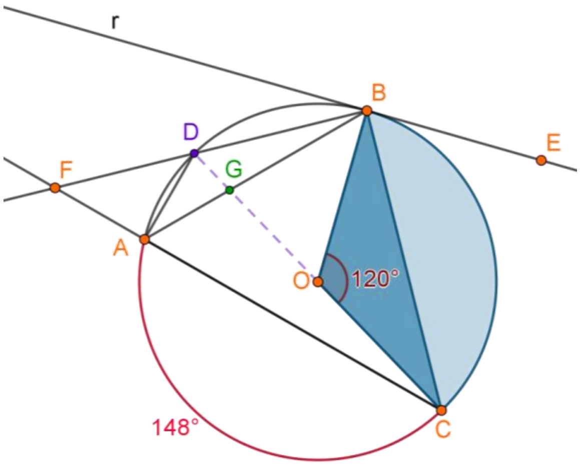
Ficha de Trabalho para Avaliação – Circunferência – 9º ano

Nome:____ Nº ___ Turma: ____ Data: ___/___/____	
Avaliação:____ Assinatura Prof.:________________	

Importante: *Lê atentamente cada uma das questões e segue as indicações dadas no enunciado. Nas questões de resposta aberta apresenta todos os cálculos/esquemas que efetuares de modo a tornar clara a tua estratégia de resolução e a tua resposta.*

Bom trabalho!

1. Considera a figura seguinte onde se encontra representada uma circunferência de centro no ponto O e com 3 cm de raio.



Sabe-se que:

- os pontos A, B, C e D pertencem à circunferência;
- a reta r é tangente à circunferência no ponto B e contém o ponto E;
- a semirreta $\dot{C}F$ contém o ponto A, a semirreta $\dot{B}D$ contém o ponto F e a semirreta $\dot{C}O$ contém o ponto D;
- $B\hat{O}C = 120^0$, $\widehat{AC} = 148^0$ e $\overline{BC} = 3\sqrt{3}\ cm$;
- os pontos E e F estão a uma distância de O superior a 3 cm;
- o ponto G é a interseção dos segmentos de reta [AB] e [OD].

1.1. Usando as letras indicadas na figura indica:

1.1.1. uma corda;	**1.1.2.** dois raios;	**1.1.3.** um diâmetro;
1.1.4. um ângulo inscrito;	**1.1.5.** um ângulo de segmento;	**1.1.6.** um ângulo com o vértice no exterior da circunferência;
1.1.7. um ângulo ao centro;	**1.1.8.** um ângulo ex-inscrito;	**1.1.9.** um ângulo com o vértice no interior do círculo.

1.2. Classifica quanto aos lados o triângulo [OBC]. Justifica.

1.3. Mostra que a altura do triângulo [OBC] em relação à base [BC] é 1,5 cm.

1.4. Determina o valor exato:

1.4.1. do perímetro do triângulo [OBC] em centímetros.

1.4.2. da área do triângulo [OBC] em cm^2.

1.4.3. da área do setor circular OBC em cm^2.

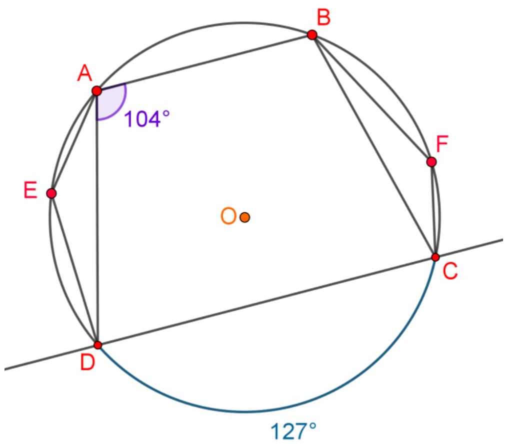
1.4.4. o comprimento do arco BAC em centímetros.

1.5. Determina as amplitudes dos ângulos e arcos seguintes:

1.5.1. ângulo CAB;	**1.5.2.** ângulo OCB;	**1.5.3.** arco DB;
1.5.4. arco DC;	**1.5.5.** arco DA;	**1.5.6.** ângulo CBE;
1.5.7. ângulo BAF;	**1.5.8.** ângulo BFC;	**1.5.9.** ângulo CGB.

1.6. Verifica que são suplementares os ângulos internos opostos do quadrilátero [ADBC] e que a sua soma é 360^0.

2. Observa a figura seguinte em que se encontram representados o quadrilátero [ABCD] e o hexágono [ABFCDE].



Sabe-se que:

- $D\hat{A}B = 104^0$;
- $\widehat{DC} = 127^0$;
- as retas AB e DC são paralelas.

2.1. Justifica a afirmação "O quadrilátero [ABCD] é um trapézio isósceles."

2.2. Determina, justificando todos os cálculos, a amplitude do arco AB.

2.3. Sem determinar a amplitude de todos os seus ângulos internos, indica, justificando:

2.3.1. o valor da soma dos ângulos internos do hexágono [ABFCDE];

2.3.2. o valor da soma dos ângulos externos do hexágono [ABFCDE].

FIM

"A diferença entre o fracasso e o sucesso está numa tentativa a mais."

Landislau Landisbokilia

Questão	1.1	1.2	1.3	1.4.1	1.4.2	1.4.3	1.4.4	1.5	1.6	2.1	2.2	2.3.1	2.3.2	Total
%	13,5	4	5	5	5	5	5	31,5	4,5	6	6	5	4,5	100

Confia nas tuas capacidades!

Sandra Carvalho

Diário de Bordo

Data: _____/_____/______ Tarefas:__________

Tarefa: _____ Início:_____/_____ Fim: _____/_____

Tarefa: _____ Início:_____/_____ Fim: _____/_____

Aluno/ Par (hora)	Caraterísticas da participação						
	Teve dificuldade em começar (questão/ tarefa)	Chamou com dúvida (questão/ tarefa)	Interviu para explicar/ conjeturar/ justificar (questão/ tarefa)	Manifestou dificuldades na resolução (questão/ tarefa)	Manifestou interesse (S/N)	Participou ativamente (S/N)	outra

Outros registos:

Anexo IX – Análise dos Resultados da Ficha de Trabalho para Avaliação

Legenda:	
NR	Não respondeu
C1	Resposta correta
C2	Resposta correta usando uma notação errada e/ou erro formal
C3	Resposta correta sem justificação
C4	Resposta correta com justificação errada
C5	Resposta parcialmente correta (identificando o Teorema de Pitágoras como um método de resolução mas aplicando-o de forma errada)
C6	Resposta correta com justificação incompleta
C7	Resposta correta sem respeitar as indicações do enunciado
E1	Resposta errada devido a procedimento inadequado
E2	Verificação não conseguida devido a erros em cálculos intermédios

Alínea 1.1

Nº	1.1.1	1.1.2	1.1.3	1.1.4	1.1.5	1.1.6	1.1.7	1.1.8	1.1.9	Total C1	Total C2	Total E1	Total NR
1	C1	C1	C1	C1	C1	C2	C2	C1	C1	7	2	0	0
2	C1	C1	C1	C2	C2	C2	C2	E1	C2	3	5	1	0
3	C2	C2	C2	C2	E1	E1	C2	E1	E1	0	5	4	0
4	C2	E1	E1	C2	E1	C2	C2	C2	E1	0	5	4	0
5	C2	C2	C1	C1	E1	C1	C1	E1	C1	5	2	2	0
6	C1	C1	C1	C1	C1	C1	C1	E1	C1	8	0	1	0
7	C1	C1	C1	C1	C1	C1	C1	C1	C1	9	0	0	0
8	C2	C2	C1	C1	E1	C1	C1	E1	C1	5	2	2	0
9	C2	C2	C2	C2	E1	C2	C2	E1	C2	0	7	2	0
10	C1	C1	C1	C1	C1	C2	C2	C1	C1	7	2	0	0
11	C1	C1	C1	C1	C1	C1	C1	C1	C1	9	0	0	0
12	C2	C2	C2	C1	E1	C1	C1	NR	C1	4	3	1	1

Alínea 1.1 (cont.)													
Nº	1.1.1	1.1.2	1.1.3	1.1.4	1.1.5	1.1.6	1.1.7	1.1.8	1.1.9	Total C1	Total C2	Total E1	Total NR
13	C2	C2	C2	C2	C2	C2	C2	E1	E1	0	7	2	0
14	C2	C2	C2	C2	E1	C2	C2	E1	C2	0	7	2	0
15	C2	C2	C2	E1	E1	C2	C2	E1	C2	0	6	3	0
16	C1	C1	C1	C1	E1	C2	C2	E1	C1	5	2	2	0
17	C1	C1	C1	C1	C1	C1	C1	C1	C1	9	0	0	0
18	C2	C2	C2	C2	E1	C2	C2	C2	C2	0	8	1	0
19	C2	C2	C2	C2	E1	C2	C2	C2	C2	0	8	1	0
20	C2	C2	C2	C2	E1	C2	C2	E1	C2	0	7	2	0
21	C1	C1	C1	C1	C1	C2	C2	C1	C1	7	2	0	0
22	C2	C2	C2	C2	C2	C2	C2	E1	C2	0	8	1	0
23	C2	C2	C2	C2	E1	C2	C2	C2	C2	0	8	1	0
24	C1	C1	C2	C2	C2	C2	C2	E1	C2	2	6	1	0
25	C2	C2	C1	C1	E1	E1	C2	E1	C2	2	4	3	0
26	C2	C2	C2	C2	E1	C2	C2	E1	C2	0	7	2	0
27	E1	C1	C1	C2	E1	E1	C2	C2	C2	2	4	3	0
28	C2	C2	E1	C2	C2	E1	C2	C2	E1	0	6	3	0
Total C1	10	11	13	12	7	7	7	6	11				
Total C2	17	16	13	15	5	17	21	6	13				
Total E1	1	1	2	1	16	4	0	15	4				
Total NR	0	0	0	0	0	0	0	1	0				

Alínea 1.2

Nº	1.2
1	E1
2	C1
3	E1
4	C6
5	E1
6	C1
7	C1
8	NR
9	E1
10	C1
11	C4
12	E1
13	C6
14	C6
15	C4
16	E1
17	C1
18	C1
19	E1
20	E1
21	C1
22	C1
23	C1
24	C1
25	C1
26	C6
27	E1
28	C6
Total C1	11,0
Total C4	2,0
Total C6	5,0
Total E1	9,0

Alínea 1.3

Nº	1.3
1	NR
2	NR
3	NR
4	C5
5	E1
6	C1
7	C1
8	NR
9	C5
10	C1
11	E1
12	NR
13	C1
14	C5
15	E1
16	E1
17	C1
18	C1
19	E1
20	E1
21	C1
22	C1
23	C5
24	C1
25	C5
26	E1
27	NR
28	C5
Total C1	9
Total C5	6
Total E1	7
Total NR	6

Alínea 1.4

Nº	1.4.1	1.4.2	1.4.3	1.4.4	Total C1	Total C2	Total E1	Total NR
1	NR	NR	E1	NR	0	0	1	3
2	E1	C1	C7	C7	1	0	1	0
3	NR	NR	C7	NR	0	0	0	3
4	C7	E1	E1	C7	0	0	2	0
5	C7	C7	C1	E1	1	0	1	0
6	C1	C1	C1	NR	3	0	0	1
7	C7	C1	C1	E1	2	0	1	0
8	NR	NR	NR	NR	0	0	0	4
9	E1	E1	NR	NR	0	0	2	2
10	C1	C1	C1	C1	4	0	0	0
11	C1	C7	C1	NR	2	0	0	1
12	NR	NR	E1	NR	0	0	1	3
13	C7	C7	C7	C7	0	0	0	0
14	C7	C7	C7	C7	0	0	0	0
15	C7	C7	E1	E1	0	0	2	0
16	C7	C7	NR	NR	0	0	0	2
17	C1	C1	C1	C1	4	0	0	0
18	C1	C7	C7	C7	1	0	0	0
19	C7	C7	NR	NR	0	0	0	2
20	C7	C7	C7	E1	0	0	1	0
21	C1	C1	C1	C1	4	0	0	0
22	C1	C1	C7	C7	2	0	0	0
23	C7	C7	NR	NR	0	0	0	2
24	C1	C7	C1	C1	3	0	0	0
25	E1	E1	NR	NR	0	0	2	2
26	C7	C7	C7	C7	0	0	0	0
27	E1	C1	C1	C7	2	0	1	0
28	C7	C7	E1	NR	0	0	1	1
Total C1	8	8	9	4				
Total C7	12	13	8	8				
Total E1	4	3	5	4				
Total NR	4	4	6	12				

Alínea 1.5

Nº	1.5.1	1.5.2	1.5.3	1.5.4	1.5.5	1.5.6	1.5.7	1.5.8	1.5.9	Total C1	Total C3	Total E1	Total NR
1	C3	C1	NR	NR	NR	NR	NR	NR	NR	1	1	0	7
2	C1	C1	C1	C1	C1	C1	C1	C1	E1	8	0	1	0
3	E1	NR	C1	C1	C1	E1	NR	NR	NR	3	0	2	4
4	C1	C1	C3	C1	E1	C1	C3	C3	E1	4	3	2	0
5	C3	C1	C1	C1	E1	C1	C1	E1	C1	6	1	2	0
6	C1	C1	C1	C1	C1	C1	C1	C1	C1	9	0	0	0
7	C1	C1	C1	C1	C1	C1	C1	C1	C1	9	0	0	0
8	C3	C3	C1	C1	C3	C1	C1	E1	C1	5	3	1	0
9	E1	E1	C3	C3	C3	NR	NR	NR	NR	0	3	2	4
10	C1	C1	C3	C1	C1	C3	C3	C1	C1	6	3	0	0
11	C1	C1	C1	C1	C1	C1	C1	C1	C1	9	0	0	0
12	C3	E1	C3	C1	E1	NR	NR	NR	NR	1	2	2	4
13	C1	C1	C1	C1	C3	E1	E1	E1	E1	4	1	4	0
14	C3	E1	C3	E1	E1	C1	NR	E1	C3	1	3	4	1
15	C3	C3	C3	C3	C3	C3	E1	E1	E1	0	6	3	0
16	C1	C1	C1	C1	E1	C3	C3	E1	C1	5	2	2	0
17	C1	C1	C1	C1	C1	C1	C1	C1	C1	9	0	0	0
18	C1	C1	C1	C1	C1	C1	C3	C1	C1	8	1	0	0
19	C3	C3	C3	C3	E1	NR	NR	NR	NR	0	4	1	4
20	C1	C1	C1	C1	C1	C1	NR	C1	C1	8	0	0	1
21	C3	C3	C3	C3	C3	NR	NR	NR	NR	0	5	0	4
22	C1	C1	C1	C1	C1	C1	E1	C1	C1	8	0	1	0
23	C3	C3	C3	C3	C3	C3	C3	E1	E1	0	7	2	0
24	C1	C1	C1	C1	C3	E1	E1	C1	C1	6	1	2	0
25	C3	C3	C1	C1	E1	E1	C3	E1	C3	2	4	3	0
26	C3	C3	C3	C3	E1	C3	C3	E1	C3	0	7	2	0
27	E1	C1	C1	C3	E1	E1	C3	E1	C3	2	3	4	0
28	C3	C3	E1	C3	C3	E1	C3	E1	E1	0	5	4	0
Total C1	13	16	16	18	10	12	7	10	12				
Total C3	12	8	10	8	8	5	9	1	4				
Total E1	3	3	1	1	9	6	4	11	6				
Total NR	0	1	1	1	1	5	8	6	6				

Alínea 1.6

Nº	1.6
1	NR
2	C1
3	NR
4	E2
5	E1
6	E2
7	C1
8	NR
9	E2
10	C1
11	E1
12	NR
13	NR
14	E2
15	E1
16	C1
17	E2
18	C1
19	NR
20	E2
21	NR
22	C1
23	NR
24	C1
25	E1
26	NR
27	E1
28	E2
Total C1	7,0
Total E1	5,0
Total E2	7,0
Total NR	9,0

Alínea 2.1

Nº	2.1
1	NR
2	C1
3	C6
4	C6
5	C1
6	C1
7	C1
8	NR
9	C6
10	NR
11	C1
12	C6
13	E1
14	E1
15	C1
16	C1
17	C1
18	C6
19	NR
20	C6
21	NR
22	C6
23	NR
24	C1
25	E1
26	NR
27	E1
28	C6
Total C1	9,0
Total C6	8,0
Total E1	4,0
Total NR	7,0

Alínea 2.2

Nº	2.2
1	NR
2	C6
3	C3
4	C3
5	C1
6	C1
7	C1
8	NR
9	NR
10	C6
11	C1
12	NR
13	C6
14	E1
15	C3
16	C1
17	C3
18	C6
19	NR
20	C6
21	C6
22	C3
23	C1
24	C1
25	NR
26	E1
27	E1
28	C3
Total C1	7,0
Total C3	6,0
Total C6	6,0
Total E1	3,0
Total NR	6,0

Alínea 2.3

Nº	2.3.1	2.3.2	Total C1	Total C2	Total C4	Total E1	Total NR
1	NR	NR	0	0	0	0	2
2	C1	C1	2	0	0	0	0
3	C1	C1	2	0	0	0	0
4	E1	E1	0	0	0	2	0
5	C4	C1	1	0	1	0	0
6	C1	C1	2	0	0	0	0
7	C1	C1	2	0	0	0	0
8	NR	NR	0	0	0	0	2
9	C4	C4	0	0	2	0	0
10	C1	C1	2	0	0	0	0
11	C1	C1	2	0	0	0	0
12	C1	C1	2	0	0	0	0
13	C4	C1	1	0	1	0	0
14	C1	C1	2	0	0	0	0
15	C4	C1	1	0	1	0	0
16	C1	C1	2	0	0	0	0
17	C1	C1	2	0	0	0	0
18	C1	C1	2	0	0	0	0
19	NR	NR	0	0	0	0	2
20	C2	C2	0	2	0	0	0
21	E1	C1	1	0	0	1	0
22	C1	C1	2	0	0	0	0
23	E1	C1	1	0	0	1	0
24	C1	C1	2	0	0	0	0
25	NR	NR	0	0	0	0	2
26	C4	C1	1	0	1	0	0
27	E1	E1	0	0	0	2	0
28	C4	C1	1	0	1	0	0
Total C1	13,0	20,0					
Total C2	1,0	1,0					
Total C4	6,0	1,0					
Total E1	4,0	2,0					
Total NR	4,0	4,0					